problème 5

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux avec O centre de la base ABCD et OB = 1.
[SO] est la hauteur de la pyramide et toutes les arêtes de la pyramide ont la même longueur.
Considérons les figures associées à la situation décrite.

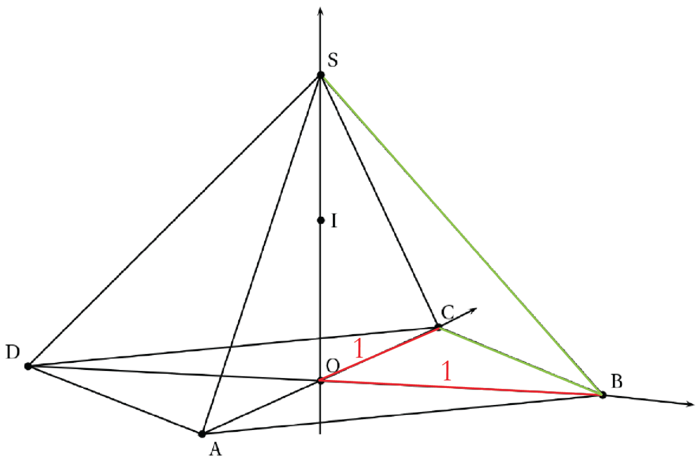


Figure 1

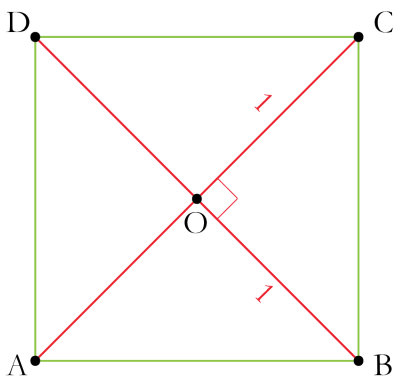


Figure 2

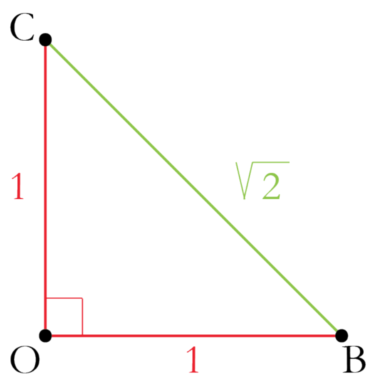


Figure 3

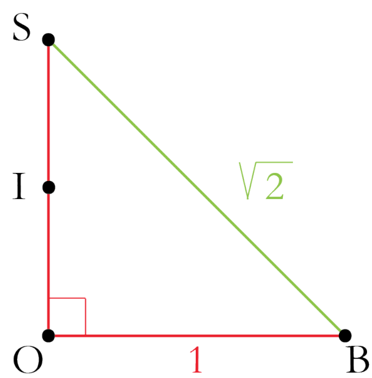


Figure 4

1. Justifions que le repère $\left(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est un repère orthonormé.

   La base ABCD est un carré,

   D'après les figures 1 et 2, on a donc : OB = OC = 1 et (OB) ⊥ (OC), et les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont orthonormés.

   D'après la figure 3, l'arête BC de la pyramide a pour longueur $\sqrt{2}$.

   Par conséquent, sur la figure 4 où le triangle OBS est rectangle en O avec SB = $\sqrt{2}$ et OB = 1, on a OS = 1 et (OS) ⊥ (OB).

Donc, le vecteurs $\overrightarrow{OS}$ est normé et orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

En conséquence, le repère $(O;\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OS})$ est un repère orthonormé.

2. Soit K le point défini par $\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et I le milieu de [OS].

a. Déterminons les coordonnées $(x_K;y_K;z_K)$ du point K.

On a : $\overrightarrow{SK}=\begin{pmatrix}x_K-0\\y_K-0\\z_K-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_K\\y_K\\z_K-1\end{pmatrix}$

De plus : $\overrightarrow{SD}=\begin{pmatrix}-1-0\\0-0\\0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{SK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_K\\y_K\\z_K-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=-\dfrac{1}{3}\\y_K=0\\z_K-1=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=-\dfrac{1}{3}\\y_K=0\\z_K=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

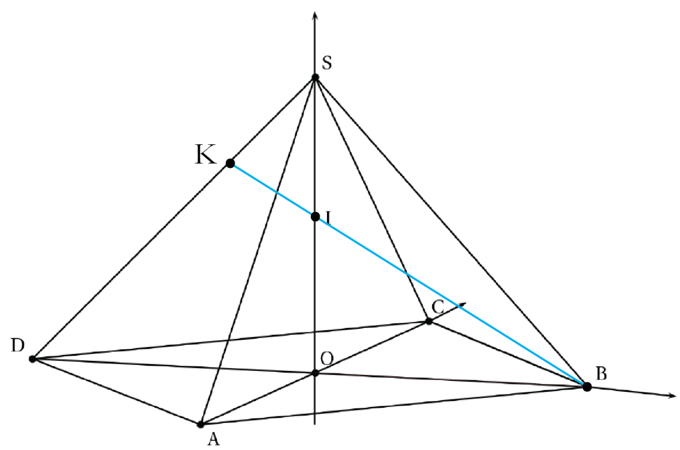
Conclusion : le point K a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3};0;\frac{2}{3}\right)$.

b. Démontrons que les points B, I et K sont alignés.

On a : $\overrightarrow{BK}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}-1\\0-0\\\frac{2}{3}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

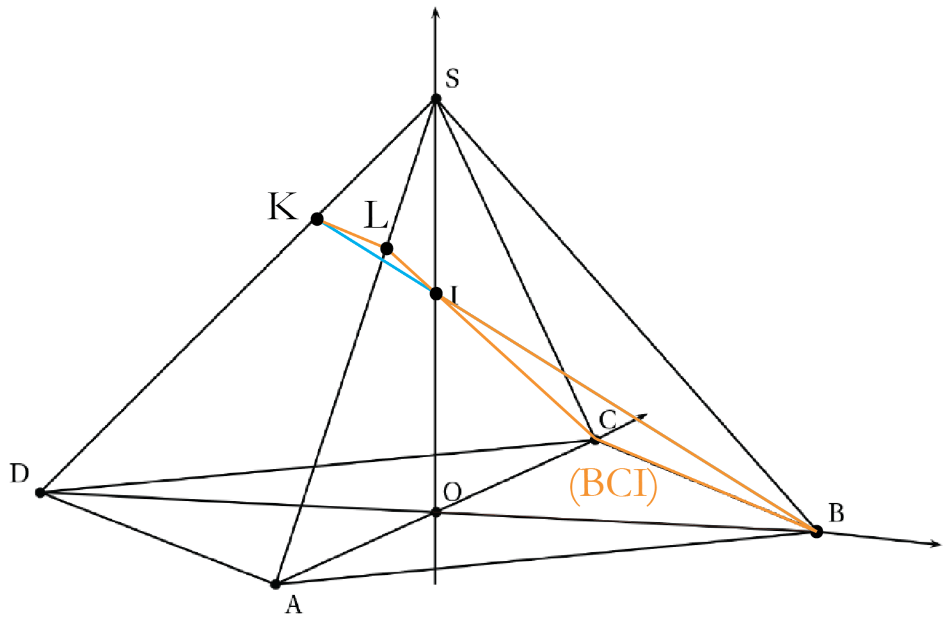
De plus : $\overrightarrow{BI}=\begin{pmatrix}0-1\\0-0\\\frac{1}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

On observe immédiatement que $\overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BI}$ étant colinéaires, les points B, I et K sont alignés.



c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).

Démontrons que (AD) // (KL).



Rappel des hypothèses

Les points B, I et K sont alignés.

$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$

L est le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).

Comme les points B, I et K sont alignés, on a : $K \in (BCI)$.

De plus, comme $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$, on a : $K \in (ADS)$.

D'où K est un point de la droite d'intersection des plans (BCI) et (ADS).

Par ailleurs, comme le point L est le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI), le point L est un point de la droite d'intersection des plans (BCI) et (ADS).

Autrement dit, la droite d'intersection des plans (BCI) et (ADS) est la droite (KL).

D'après le théorème du toit (c.f. approfondissement autour de la géométrie dans l'espace), la droite (BC) du plan (BCI) et la droite (AD) du plan (ADS) étant parallèles, (BC) et (AD) sont parallèles à la droite d'intersection des plans (BCI) et (ADS), c'est-à-dire à la droite (KL).

Conclusion : (AD) // (KL).

d. Déterminons les coordonnées $(x_L; y_L; z_L)$ du point L.

On a (AD) // (KL), donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{KL}$ colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{KL} = t\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L - \left(-\frac{1}{3}\right) \\ y_L - 0 \\ z_L - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1-0 \\ 0-(-1) \\ 0-0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L + \frac{1}{3} \\ y_L \\ z_L - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = -t - \frac{1}{3} \\ y_L = t \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases}$ (Système 1)

De plus, $L \in (SA)$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \overrightarrow{AL} = t'\overrightarrow{AS} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L - 0 \\ y_L - (-1) \\ z_L - 0 \end{pmatrix} = t'\begin{pmatrix} 0-0 \\ -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_L \\ y_L + 1 \\ z_L \end{pmatrix} = t'\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = -1 - t' \\ z_L = -t' \end{cases}$ (Système 2)

Les coordonnées du point L vérifiant les systèmes 1 et 2, on obtient $t = -\frac{1}{3}$ et

$\begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = -\frac{1}{3} \\ z_L = \frac{2}{3} \end{cases}$

Par conséquent, le point L a pour coordonnées $\left(0; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

3. Soit On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Montrons que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (BCI), c'est-à-dire est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BC}$.

On a : $\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculons $\vec{n}.\overrightarrow{BI}$ et $\vec{n}.\overrightarrow{BC}$.

$\vec{n}.\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 + 1 = 0$

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI),

b. Montrons que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.

On a : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0-0\\0-(-1)\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DS}\begin{pmatrix}0-(-1)\\0-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

On remarque immédiatement que $\vec{n}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{DS}$.

Donc les vecteur $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$sont coplanaires.

c. Les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires, tandis que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI). Par conséquent, les plans (BCI) et (SAD) sont orthogonaux.