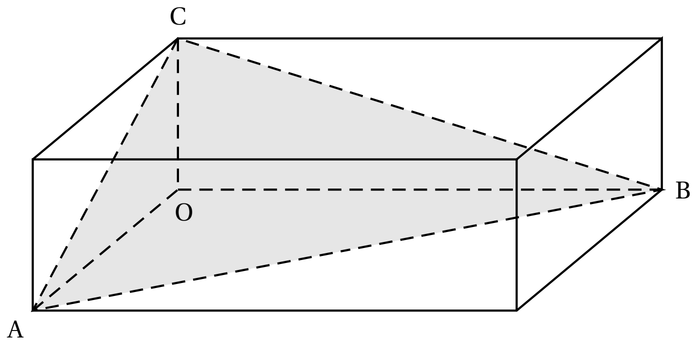
Exercice 3 **Commun à tous les candidats** **4 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points :

A de coordonnées (2 ; 0 ; 0), B de coordonnées (0 ; 3 ; 0) et C de coordonnées (0 ; 0 ; 1).



L'objectif de cet exercice est de calculer l'aire du triangle ABC.

1. **a.** Pour montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\2\\6\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC), il suffit de démontrer que ce vecteur est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), par exemple $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-2\,;\,3\,;\,0)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = -2\times3+3\times2+0\times6 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$.

$\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2\,;\,0\,;\,1)$ donc $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n} = -2\times3+0\times2+1\times6 = 0$ donc $\overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$.

Donc le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC).

b. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$, c'est-à -dire $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$. Or $\overrightarrow{AM}$ a pour coordonnées $(x-2\,;\,y\,;\,z)$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \iff (x-2)\times3+y\times2+z\times6 = 0 \iff 3x+2y+6z-6 = 0$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $3x+2y+6z-6=0$.

2. On note d la droite passant par O et orthogonale au plan (ABC).

a. La droite d est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$ normal à (ABC).

De plus elle passe par le point O de coordonnées (0 ; 0 ; 0).

La droite d a donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3k\\ y &=& 2k,\\ z &=& 6k\end{array}\right. \quad k\in\mathbb{R}$

b. La droite d coupe le plan (ABC) au point H.

Les coordonnées du point H vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} x_H &=& 3k\\ y_H &=& 2k\\ z_H &=& 6k\\ 3x_H+2y_H+6z_H-6 &=& 0\end{array}\right.$

Donc $3\times3k+2\times2k+6\times6k-6=0$ ce qui équivaut à $9k+4k+36k=6$ ou $49k=6$ donc $k=\frac{6}{49}$.

$x=3k$ donc $x=\frac{18}{49}$, $y=2k$ donc $y=\frac{12}{49}$, et $z=6k$ donc $z=\frac{36}{49}$.

Le point H a donc pour coordonnées $\left(\frac{18}{49}\,;\,\frac{12}{49}\,;\,\frac{36}{49}\right)$.

c. $OH^2 = (x_H-x_O)^2+(y_H-y_O)^2+(z_H-z_O)^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{36}{49}\right)^2 = \frac{18^2+12^2+36^2}{49^2} = \frac{1764}{49^2}$

Donc $OH = \sqrt{\frac{1764}{49^2}} = \frac{42}{49} = \frac{7\times6}{}\ \frac{6}{7}$.

3. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, où $\mathscr{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

- En prenant le triangle OAB pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OC, et le volume $\mathscr{V}$ est égal à $\frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times \text{OC}$ où $\mathscr{B}$ est l'aire du triangle OAB.
  $\mathscr{B} = \frac{1}{2} \times \text{OA} \times \text{OB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$ et $\text{OC} = 1$.
  Donc $\mathscr{V} = \frac{1}{3} \times 3 \times 1 = 1$ (u. a.).

- En prenant le triangle ABC pour base de la pyramide OABC, la hauteur est OH, et le volume $\mathscr{V}$ est égal à $\frac{1}{3} \times \mathscr{B}' \times \text{OH}$ où $\mathscr{B}'$ est l'aire du triangle ABC.
  $\text{OH} = \frac{6}{7}$ et $\mathscr{V} = 1$ donc $1 = \frac{1}{3} \times \mathscr{B}' \times \frac{6}{7}$ et donc $\mathscr{B}' = \frac{49}{14} = \frac{7 \times 7}{7 \times 2} = \frac{7}{2} = 3,5$.

L'aire du triangle ABC vaut $\frac{7}{2} = 3,5$ (u. a.).