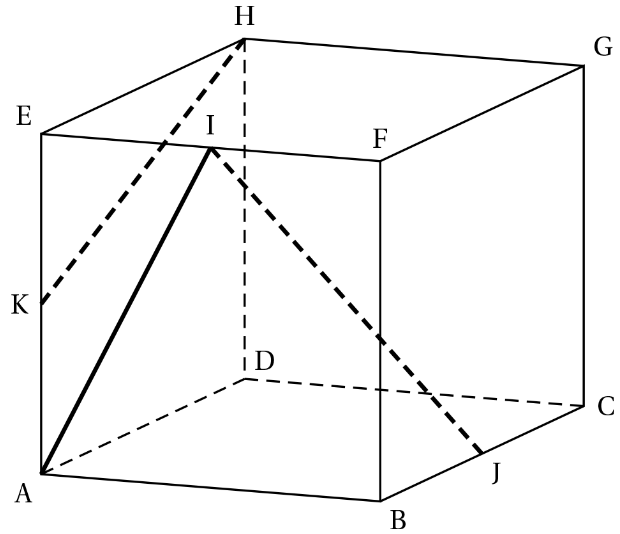
problème de géométrie

Soit le cube ABCDEFGH ci-dessous. I milieu de [EF], J milieu de [BC] et K milieu de [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles car la droite (KH) appartient au plan (ADE) qui est orthogonal au plan (ABE) auquel appartient la droite (AI).
   Pour que les droites (KH) et (AI) soient parallèles, A étant un point du plan (ADE) comme les points K et H, il faudrait que le point I appartienne aussi au plan (ADE), ce qui n'est pas le cas.

2.a. Tableaux de coordonnées.

Point	A	B	C	D	E	F
Coordonnées	$(0;0;0)$	$(1;0;0)$	$(1;1;0)$	$(0;1;0)$	$(0;0;1)$	$(1;0;1)$

Point	G	H	I	J	K	L
Coordonnées	$(1;1;1)$	$(0;1;1)$	$\left(\frac{1}{2};0;1\right)$	$\left(1;\frac{1}{2};0\right)$	$\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$	$(4;0;3)$

Point	M
Coordonnées	$(5;3;1)$

2.b. Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{IJ} = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

De plus : $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

On observe trivialement que : $-\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{IJ}$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc <u>coplanaires</u>.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$, ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ ← Représentation paramétrique de la droite d_1.

$\begin{cases} x = 4 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = 8 + 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$ ← Représentation paramétrique de la droite d_2.

Il est important de différencier les paramètres intervenant dans les deux représentations paramétriques au risque d'une confusion pénalisante, différenciation non opérée dans l'énoncé et permettant d'observer si le candidat comprend ce qu'il fait.

3. Déterminons si les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = t \\ y - 8 = -2t \\ z - (-2) = -3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-8 \\ z-(-2) \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = t\vec{u}$$

Cette écriture signifie que la droite d_1 passe par le point de coordonnées (3 ; 8 ; -2) et est dirigée par le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs :

$$\begin{cases} x = 4 + t' \\ y = 1 + t' \\ z = 8 + 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = t' \\ y - 1 = t' \\ z - 8 = 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \\ z-8 \end{pmatrix} = t'\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = t'\vec{v}$$

Cette écriture signifie que la droite d_2 passe par le point de coordonnées (4 ; 1 ; 8) et est dirigée par le vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 <u>ne sont pas parallèles</u>.

4. Déterminons si la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

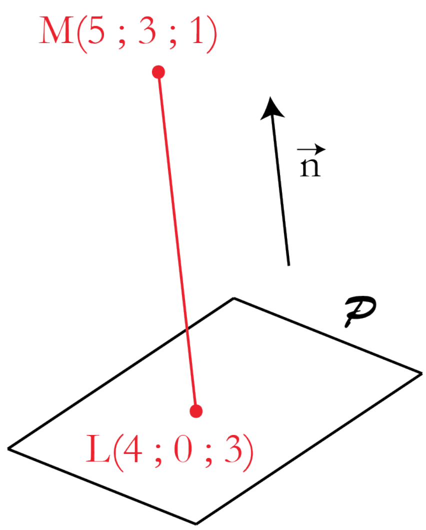
   La droite d_2 passe par le point de coordonnées (4 ; 1 ; 8) et est dirigée par le vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

   Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$. Par conséquent, un vecteur orthogonal au plan est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$, par exemple.

   Or, $\vec{v}.\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = 1(1) + (1)(3) + (2)(-2) = 1 + 3 - 4 = 0$

   Le vecteur directeur de la droite d_2 étant orthogonal à un vecteur orthogonal au plan $\mathcal{P}$, la droite d_2 est <u>parallèle</u> au plan $\mathcal{P}$.

5. Montrons que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathcal{P}$.



Pour démontrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathcal{P}$, il suffit de démontrer que L appartient au plan $\mathcal{P}$ et que le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vérifions que L(4 ; 0 ; 3) appartient au plan $\mathcal{P}$.

On a : $4 + 3(0) - 2(3) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$, donc <u>L $\in \mathcal{P}$</u>.

Démontrons que le vecteur $\overrightarrow{ML}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On a : $\overrightarrow{ML} = \begin{pmatrix} 4-5 \\ 0-3 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{n}$

<u>Conclusion</u>

Le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathcal{P}$,