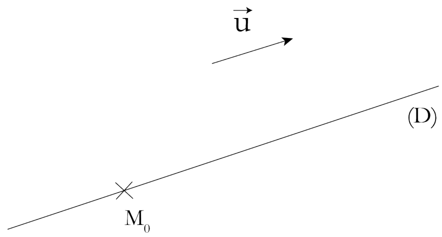
Droites de l'espace

Droite dirigée par un vecteur directeur

On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère une droite (D) passant par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ dont les coordonnées vectorielles, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, sont :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



Position du problème : Comment caractériser la droite (D) ?

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace.

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈(D) ⇔ $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ⇔ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} \iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est appelé représentation paramétrique de la droite (D). Ces trois relations donnent, pour une valeur du réel t, chacune des coordonnées d'un point de (D).

Application

On considère la droite (D) passant par le point A(2, -1, 3) et de vecteur directeur $\vec{u}$ dont les coordonnées vectorielles, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, sont :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈(D) ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ⇔ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - (-1) \\ z - 3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - 2 = 4t \\ y + 1 = t \\ z - 3 = 5t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 5t + 3 \end{cases}$ Représentation paramétrique de la droite (D)

Pour t = 0, on a : $\begin{cases} x = 4(0) + 2 = 2 \\ y = 0 - 1 = -1 \\ z = 5(0) + 3 = 3 \end{cases}$.

Nous retrouvons les coordonnées du point A de la droite (D).

Pour t = 1, on a : $\begin{cases} x = 4(1) + 2 = 6 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 5(1) + 3 = 8 \end{cases}$.

Nous trouvons les coordonnées d'un point que l'on nommera, par exemple, B de la droite.

Pour t = $-\frac{1}{2}$, on a : $\begin{cases} x = 4(-\frac{1}{2}) + 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \\ z = 5(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Nous trouvons les coordonnées d'un point que l'on nommera, par exemple, C de la droite.

Déterminons $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 0 - (-1) \\ 8 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

Nous retrouvons les coordonnées du vecteur directeur initial de la droite (D).

Représentation de la droite (D) par un système d'équations cartésiennes.

Le système (S) $\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = t \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$ si a est non nul, par exemple.

D'où : (S) équivaut à $\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = t \\ y = b\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + y_0 \\ z = c\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + z_0 \end{cases}$, c.-à-d. à $\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = t \\ -bx + ay = -bx_0 + ay_0 \\ -cx + az = -cx_0 + az_0 \end{cases}$

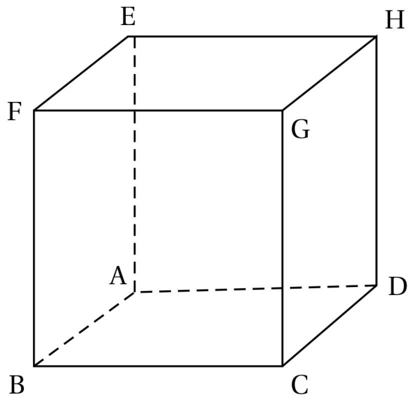
Les deuxième et troisième équations ci-dessus sont les équations cartésiennes de deux plans, une droite étant définie comme l'intersection de deux plans dans l'espace.
Dans l'application précédente :

$$\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 5t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y + 1 = t \\ z = 5t + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(y + 1) + 2 \\ y + 1 = t \\ z = 5(y + 1) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y = 6 \\ y + 1 = t \\ -5y + z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - 4y - 6 = 0\ (P1) \\ y + 1 = t \\ 5y - z + 8 = 0\ (P2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y - 6 = 0\ (P1) \\ 5y - z + 8 = 0\ (P2) \end{cases}$$ Ce système caractérise la droite (D).

Exercice 1

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1\,;\,\frac{1}{3}\,;\,0\right)$, $J\left(0\,;\,\frac{2}{3}\,;\,1\right)$, $K\left(\frac{3}{4}\,;\,0\,;\,1\right)$ et $L(a\,;\,1\,;\,0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right., \quad t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Exercice 2

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\,,\ \vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1\,;\,-1\,;\,1)$ et les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathcal{D}\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2t-1 \\ y &=& -3t+2 \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \\ z &=& t \end{array}\right. \qquad \mathcal{D}'\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 3t' \\ y &=& t'+2 \quad \text{où } t' \in \mathbb{R} \\ z &=& 3t'-2 \end{array}\right.$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite $\mathcal{D}$ ».
Proposition 2 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales ».
Proposition 3 : « Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires ».

maquette

Exercice 1

La compréhension des questions peut être facilitée par la réalisation rapide d'une modélisation 3D de la situation.