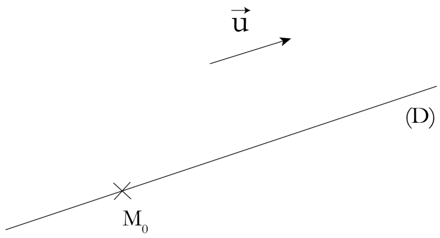
Droites de l'espace

Droite dirigée par un vecteur directeur

On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. On considère une droite (D) passant par un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ dont les coordonnées vectorielles, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, sont :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$



Position du problème : Comment caractériser la droite (D) ?

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace.

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈(D) ⇔ $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ⇔ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = at \\ y - y_0 = bt \\ z - z_0 = ct \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases}$$

Le système ci-dessus est appelé représentation paramétrique de la droite (D). Ces trois relations donnent, pour une valeur du réel t, chacune des coordonnées d'un point de (D).

Application

On considère la droite (D) passant par le point A(2, -1, 3) et de vecteur directeur $\vec{u}$ dont les coordonnées vectorielles, dans la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, sont :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, M∈(D) ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ⇔ Il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - (-1) \\ z - 3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 4t \\ y + 1 = t \\ z - 3 = 5t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = t - 1 \\ z = 5t + 3 \end{cases}$ Représentation paramétrique de la droite (D)

Pour t = 0, on a : $\begin{cases} x = 4(0) + 2 = 2 \\ y = 0 - 1 = -1 \\ z = 5(0) + 3 = 3 \end{cases}$.

Nous retrouvons les coordonnées du point A de la droite (D).

Pour t = 1, on a : $\begin{cases} x = 4(1) + 2 = 6 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = 5(1) + 3 = 8 \end{cases}$.

Nous trouvons les coordonnées d'un point que l'on nommera, par exemple, B de la droite.

Pour t = $-\frac{1}{2}$, on a : $\begin{cases} x = 4(-\frac{1}{2}) + 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2} \\ z = 5(-\frac{1}{2}) + 3 = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Nous trouvons les coordonnées d'un point que l'on nommera, par exemple, C de la droite.

Déterminons $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 0 - (-1) \\ 8 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \vec{u}$$

Nous retrouvons les coordonnées du vecteur directeur initial de la droite (D).