

PLANS de l'espace

caractérisation vectorielle d'un plan

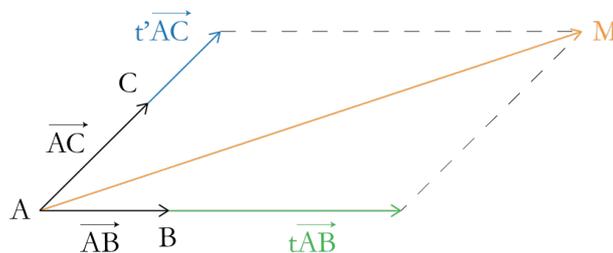
On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace.

Cours

Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe deux réels t et t' tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$$

On dit que le plan est dirigé par les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} et que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont des vecteurs directeurs du plan (ABC).



Position du problème : Comment caractériser un plan (ABC) ?

Considérons les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et le point $A(x_A, y_A, z_A)$.

Représentation paramétrique d'un plan de l'espace.

Pour tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ où t et t' sont

$$\text{deux réels} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = at + a't' + x_A \\ y = bt + b't' + y_A \\ z = ct + c't' + z_A \end{cases}$$

Le système ci-dessus est appelé représentation paramétrique du plan (ABC). Ces trois relations donnent, pour une valeur des réels t et t', chacune des coordonnées d'un point du plan (ABC).

Application

On considère le plan (P) passant par l'origine O du repère et de vecteurs directeurs \vec{u} et \vec{v} avec :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout point M(x, y, z) de l'espace, $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ où t et t' sont deux réels $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t + t' \\ z = t' \end{cases}$ avec t et t' réels

Représentation paramétrique du plan (P).

Pour t = 0 et t' = 1, on a : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 1 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$.

Le point de coordonnées (0, 1, 1) appartient au plan (P). Ce point est l'image du point O dans la translation de vecteur \vec{v} .

Pour t = 1 et t' = 0, on a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 0 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

Le point de coordonnées (1, 1, 0) appartient au plan (P). Ce point est l'image du point O dans la translation de vecteur \vec{u} .

Représentation du plan (P) par une équation cartésienne.

Le système (S) $\begin{cases} x = t \\ y = t + t' \\ z = t' \end{cases}$ est équivalent à $\begin{cases} x = t \\ y = x + z \\ z = t' \end{cases}$, par exemple.

D'où : (S) équivaut à $\begin{cases} x = t \\ z = t' \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

L'équation $x - y + z$ est appelée équation cartésienne du plan (P).

Propriété

Une équation cartésienne de plan est de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Cette équation comporte une information très utile :

Le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal au plan (P).

EXERCICES

Exercice 1

On considère un tétraèdre ABCD.

Soit M le point tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$.

Démontrer que le point M appartient au plan ABC.

Exercice 2

Cours

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont dits coplanaires lorsque A, B, C et D appartiennent au même plan (A, B, C et D coplanaires).

On considère un pavé droit ABCDEFGH.

On note I et J les milieux respectifs des côtés [GH] et [FG].

Démontrer que les vecteurs \overrightarrow{IJ} , \overrightarrow{FD} et \overrightarrow{DH} sont coplanaires.

Exercice 3

On suppose l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) passant par le point A(1 ; -2 ; 3) et dirigé par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} tels que :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On modélisera dans l'espace la situation à l'aide du logiciel GeoGebra.

1. Déterminer une représentation paramétrique du plan (P).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (P).
3. Déterminer un vecteur \vec{n} normal au plan.
4. Déterminer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{n}$ et $\vec{v} \cdot \vec{n}$.