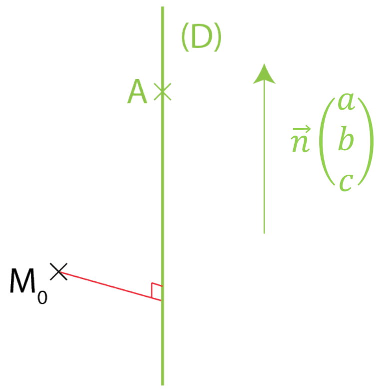
Distance entre un point et une droite

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère le point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ et la droite (D) de vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ qui passe par le point $A(x_A;y_A;z_A)$.

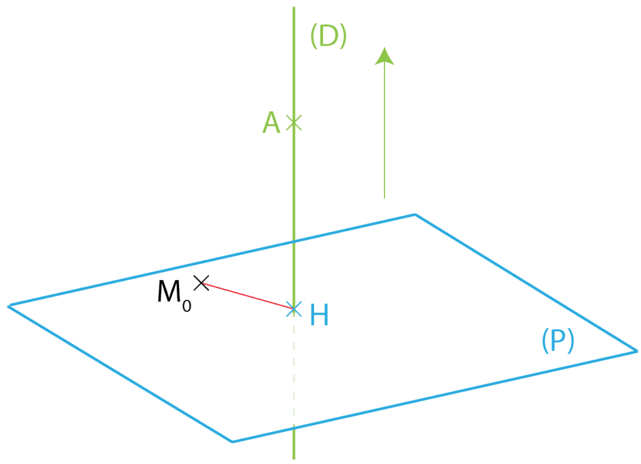


Problème

On se propose de déterminer la distance entre le point M_0 de l'espace et la droite (D).

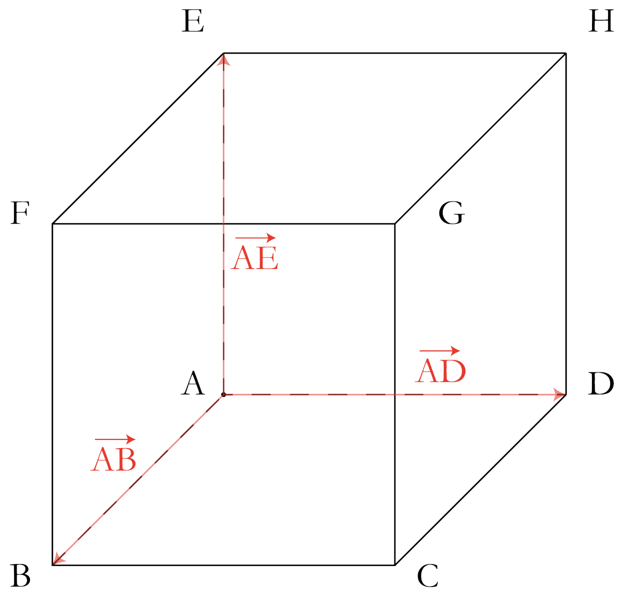
Résolution

Pour déterminer la distance entre le point M_0 de l'espace et la droite (D), il est nécessaire de déterminer une équation cartésienne du plan orthogonal à la droite (D) passant par le point M_0, puis les coordonnées du point d'intersection H de la droite (D) et du plan (P). La distance entre le point M_0 et la droite (D) étant la distance HM_0.



exemple

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 ci-dessous et on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On souhaite calculer la distance entre le point C(1 ; 1 ; 0) de l'espace et la droite (AG) de vecteur directeur $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.



Déterminons tout d'abord une équation cartésienne du plan (P) orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AG}$ passant par le point C.

Le plan (P) possède une équation cartésienne de la forme $x + y + z + d = 0$ car celui-ci est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Déterminons d

C(1 ; 1 ; 0) ∈ (P)$/x + y + z + d = 0$, donc : 1 + 1 + 0 + d = 0, d'où : d = -2.

<u>Conclusion</u>

Une équation cartésienne du plan (P) est : $x + y + z - 2 = 0$.

Déterminons les coordonnées du point P, point d'intersection du plan (P) et de la droite (AG). Pour déterminer ces coordonnées, il est tout d'abord nécessaire de formuler une représentation paramétrique la droite (AG).

Pour tout point M de l'espace, M(x ; y ; z) ∈ (AG) ⇔ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AG}$ colinéaires ⇔

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \leftarrow \text{Représentation paramétrique de (AG)}$$

Les coordonnées (x ; y ; z) du point P, point d'intersection du plan (P) et de la droite (AG) vérifient les relations $x + y + z - 2 = 0$ et $\begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$

D'où : t + t + t - 2 = 0, c'est-à-dire : 3t = 2 et $t = \frac{2}{3}$.

Autrement dit, P a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

La distance entre le point C(1 ; 1 ; 0) et la droite (AG) est égale à la distance PC.

Déterminons PC.

$$PC = \sqrt{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}$$

D'où : $PC = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Conclusion

La distance entre le point C de l'espace et la droite (AG) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82$.

On retrouve ce résultat par une modélisation à l'aide du logiciel GeoGebra, comme ci-dessous.