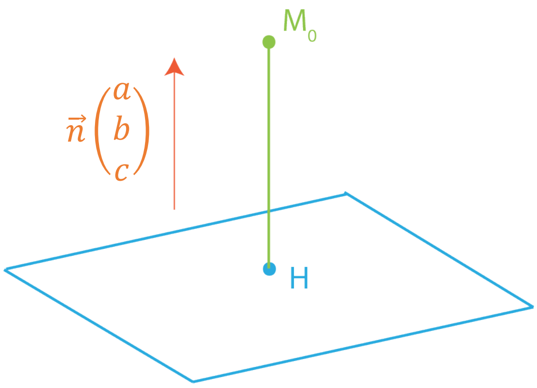
Distance entre un point et un plan

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le point $M_0(x_0; y_0; z_0)$ et le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.



Problème

On se propose de déterminer la distance entre le point M_0 de l'espace et le plan (P) dont l'équation cartésienne est $ax + by + cz + d = 0$.

Résolution

Le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Par ailleurs, la distance entre le point M_0 de l'espace et le plan (P) est égale à la distance HM_0 où H est le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan.

Autrement dit, (1) les vecteurs $\overrightarrow{HM_0}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et

(2) H(x ; y ; z) ∈ (P).

Traduisons la propriété (1)

$$\overrightarrow{HM_0} \text{ et } \vec{n} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM_0} = t\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x - x_0\\y - y_0\\z - z_0\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x - x_0 = at\\y - y_0 = bt, t \in \mathbb{R}\\z - z_0 = ct\end{cases}$$

Traduisons la propriété (2)

H(x ; y ; z) ∈ (P) $\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$.

Déterminons la distance HM_0

$$HM_0 = \sqrt{(x-x_0)^2 + \left(y-y_0\right)^2 + (z-z_0)^2} = \sqrt{(at)^2+(bt)^2+(ct)^2} \text{ d'après le (1)}$$

D'où : $HM_0 = \sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)t^2}$ (3)

D'après la propriété (1) et la propriété (2), on a :

$a(x_0+at)+b\left(y_0+bt\right)+c(z_0+ct)+d=0,$

D'où : $ax_0+by_0+cz_0+d+(a^2+b^2+c^2)t$

Donc : $t = -\frac{(ax_0+by_0+cz_0+d)}{\left(a^2+b^2+c^2\right)}$ (4)

En substituant l'expression (4) dans l'expression (3), on obtient :

$$HM_0 = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)t^2} = \sqrt{(a^2+b^2+c^2)\left(-\frac{(ax_0+by_0+cz_0+d)}{(a^2+b^2+c^2)}\right)^2}$$

D'où :

$$HM_0 = \sqrt{\frac{(ax_0+by_0+cz_0+d)^2}{(a^2+b^2+c^2)}} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

où : $|ax_0+by_0+cz_0+d| = \begin{cases} ax_0+by_0+cz_0+d \ si \ ax_0+by_0+cz_0+d \geq 0 \\ -(ax_0+by_0+cz_0+d) \ si \ ax_0+by_0+cz_0+d < 0 \end{cases}$

Conclusion

La distance entre un point $M_0(x_0;y_0;z_0)$ de l'espace et un plan (P) d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ est donnée par la formule concise :

$$HM_0 = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$