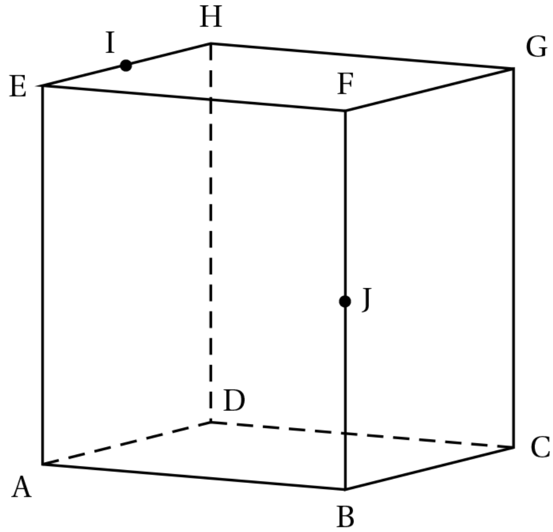
PROBLÈME 4

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

c. On note K le milieu du segment [HI]. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{6}$.
On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3}B \times h$ *où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.*

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F$'$. Montrer que le point F$'$ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$.

d. Calculer la longueur FF$'$. En déduire l'aire du triangle BGI.