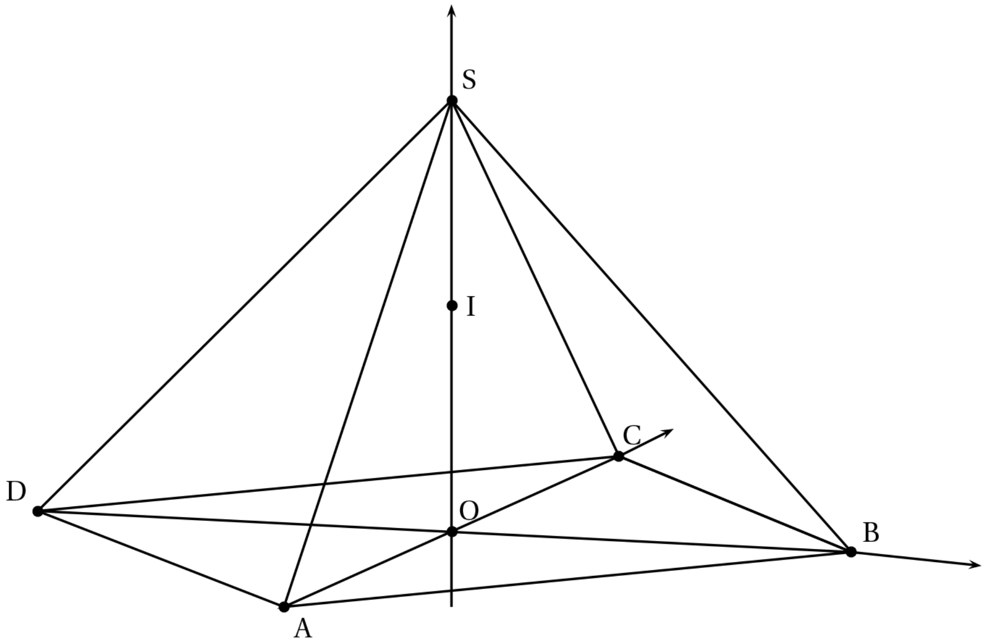
Problème 5

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$ est orthonormé.

   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{\text{SK}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{SD}}$ et on note I le milieu du segment [SO].
   - **a.** Déterminer les coordonnées du point K.
   - **b.** En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   - **c.** On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
     Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   - **d.** Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\text{OB}},\,\overrightarrow{\text{OC}},\,\overrightarrow{\text{OS}}\right)$.
   - **a.** Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
   - **b.** Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{\text{AS}}$ et $\overrightarrow{\text{DS}}$ sont coplanaires.
   - **c.** Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?*