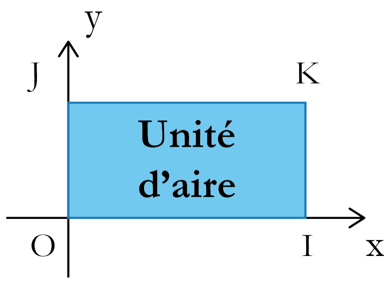
INTEGRATION

Définition

Soit un repère (O ; I, J), soit K le point de coordonnées (1 ; 1).

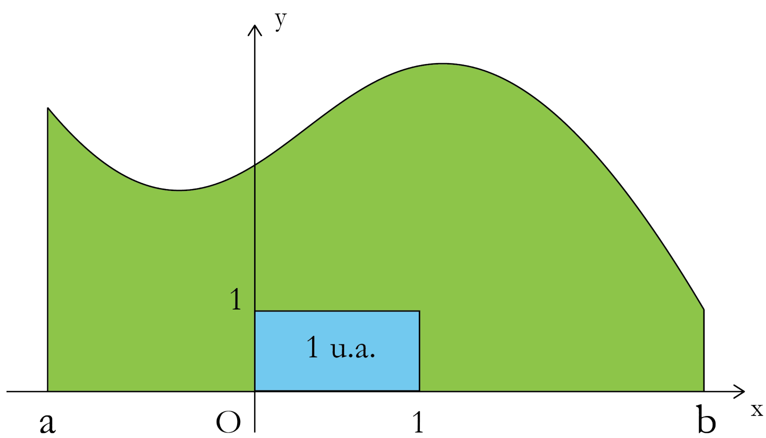


L'aire du rectangle OIKJ est appelée unité d'aire et est notée u.a.

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b, exprimée en unités d'aire, est appelée intégrale de a à b de la fonction f. Elle est notée :

$$\int_a^b f(x)dx$$



Propriétés

Positivité

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].
On a :

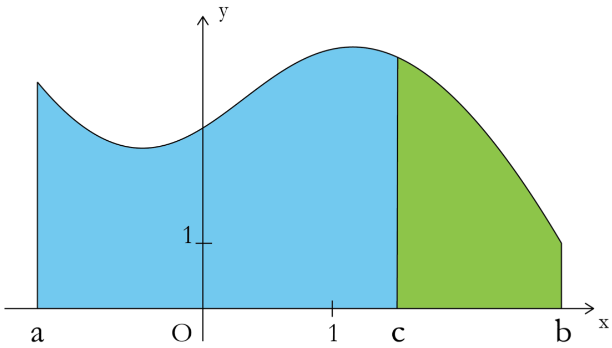
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Si a = b, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

Relation de Chasles
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; c] et soit b ∈ [a ; c].
On a la relation :

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$



Primitive d'une fonction

Théorème fondamental
Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] et F la fonction définie sur [a ; b] par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

La fonction f est dérivable sur [a ; b] et a pour dérivée f.

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I.
F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et si F' = f.

Théorème
Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors f admet des primitives sur I.

Théorème
Si f est une fonction continue sur un intervalle I et soit F est une primitive de f sur I
- Les primitives de f sur I sont les fonctions G définies par G(x) = F(x) + k où k est un réel.
- Quels que soient x_0 ∈ I et y_0 ∈ I, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Intégrale et primitive

Propriété
Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b]. Soit F une primitive de f sur [a ; b]. On a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$