Pour tout entier naturel n, on définit la fonction numérique f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}*.$$

On note C_n la courbe représentant f_n dans un plan affine euclidien E rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath}\right)$ (unité : 4 cm), et on désigne par I_n l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\text{d}t.$$

Partie 1

1. Étudier les variations de f_1 et tracer la courbe C_1.
2. Soit φ l'application du plan E dans lui-même qui au point M de coordonnées $(x\,;\,y)$, associe le point M' de coordonnées $x' = x$ et $y' = x - y$.
   Montrer que φ est une symétrie, dont on précisera l'axe et la direction.
   Vérifier que la courbe C_3 est l'image de C_1 par φ. Tracer alors C_3 dans le même repère que C_1.
3. Calculer $I_1 + I_3$. En déduire la valeur de I_3.
4. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par les courbes C_1 et C_3 et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Partie 2

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $u'(x)$.
2. On pose, pour tout x de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = u(\tan x)$.
   a. Préciser $F(0)$.
   b. Montrer que F est dérivable et calculer $F'(x)$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.
   c. En déduire que : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $F(x) = x$.
   d. Déduire de l'égalité précédente la valeur de $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel p,

$$I_{2p+1} + I_{2p+2} = \frac{1}{2p+1}.$$

   Calculer alors I_2, I_4 et I_6.
   b. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant I_{2p} \leqslant \dfrac{1}{2p+1}$.
   En déduire la limite de I_{2p} quand p tend vers $+\infty$.
4. On définit la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall p \geqslant 1, \quad v_p = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{2p+1}.$$

   Montrer que $\forall p \geqslant 1, \quad v_p = I_0 + (-1)^{p-1} I_{2p}$.
   Quelle est la limite de v_p quand p tend vers $+\infty$?

Partie 3

On considère, dans un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ de dimension 3, un mobile M dont les coordonnées sont, dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad y = \frac{t}{1+t^2}, \quad z = \frac{t^2}{1+t^2}$$

t désignant le temps et décrivant l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Montrer que le point M appartient à un plan P dont on donnera une équation.
2. Vérifier que le point O' de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et les vecteurs $\vec{u} = \vec{\jmath}$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{\imath} - \vec{k}\right)$ constituent un repère orthonormé de P.
   Trouver un vecteur $\vec{w}$ tel que $\left(\mathrm{O}',\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)$ soit un repère orthonormé de $\mathscr{E}$.
3. Exprimer, en fonction de t, les coordonnées X, Y et Z du point mobile M dans le repère $\left(\mathrm{O}',\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)$.
   En déduire que le point M appartient à la courbe Γ du plan d'équation
   $4X^2 + 2Y^2 = 1$.
   Tracer cette courbe dans le repère $\left(\mathrm{O}',\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\right)$.
   Préciser la trajectoire de M et le sens de parcours sur sa trajectoire