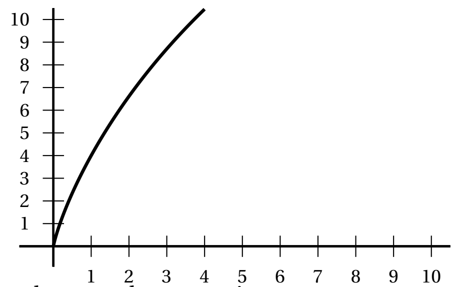
Soit g la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = 4x - x\ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A



Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.

L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. **a.** On rappelle que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x \to 0} x\ln x = 0.$$

b. Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.

b. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

3. On désigne par G la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$G(x) = \frac{1}{4}x^2(9 - 2\ln x).$$

On admet que la fonction G est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

a. Démontrer que la fonction G est une primitive de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

« Il n'existe aucun réel α strictement supérieur à 1 tel que $\displaystyle\int_1^{\alpha} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. »