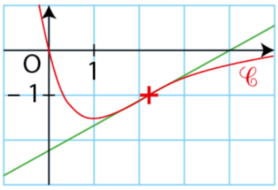
Correction de l'exercice 79, page 280

79 Voici, dans un repère, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4xe^{-x}$.



a) Déterminer graphiquement la convexité de *f*.
b) Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x, puis une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
c) Sur quel intervalle a-t-on $f(x) \geqslant 4e^{-2}(x-4)$?
d) En déduire sans calculatrice que $e^{0,5} \leqslant \frac{5}{3}$.
Le vérifier ensuite à la calculatrice.

a) D'après la figure, la fonction f semble convexe sur l'intervalle]-∞ ; α] et concave sur l'intervalle [α ; +∞[où 1,8 < α < 2,3.

b) Soit $f(x) = -4xe^{-x}$. Déterminons $f'(x)$.

On a :

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = -4x$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -4$ et $v'(x) = -e^{-x}$

D'où : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -4e^{-x} + (-4x)(-e^{-x}) = (4x-4)e^{-x}$

Donc : $f'(x) = 4(x-1)e^{-x}$

Déterminons une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point de la courbe d'abscisse 2

Déterminons $f(2)$ et $f'(2)$.

On a : $f(2) = -4(2)e^{-2} = -8e^{-2}$

De plus : $f'(2) = 4(2-1)e^{-2} = 4e^{-2}$

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point de la courbe d'abscisse 2 s'écrit sous la forme : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

C'est-à-dire : $y = 4e^{-2}(x-2) - 8e^{-2} = (4x-16)e^{-2} = 4e^{-2}(x-4)$

La tangente a pour équation : $y = 4e^{-2}(x-4)$

c) Déterminons sur quel intervalle $f(x) \geq 4e^{-2}(x-4)$.

Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 4e^{-2}(\mathrm{x} - 4)$ revient à déterminer sur quel intervalle la courbe représentative de la fonction f est située au-dessous de la tangente au point d'abscisse 2, c'est-à-dire sur quel intervalle la fonction f est convexe.

Soit $f'(x) = 4(x-1)e^{-x}$. Déterminons $f\,''(x)$.

On a :

$f'(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = 4(x-1)$ et $v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 4$ et $v'(x) = -e^{-x}$

D'où : $f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 4e^{-x} + (4x-4)(-e^{-x}) = (-4x+8)e^{-x}$

Donc : $f''(x) = (-4x+8)e^{-x}$

Étudions le signe de f "(x).

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de (-4x+8)		+	0	-	
Signe de e^{-x}		+	|	+	
Signe de f"(x)		+	0	-	

D'après le tableau ci-dessus, f "(x) ≥ 0 pour x ∈]-∞ ; 2]. Donc f est convexe sur cet intervalle.

Conclusion : $f(x) \geq 4e^{-2}(\mathrm{x} - 4)$ pour tout x ∈]-∞ ; 2].

d) Pour tout x ∈ [2 ; +∞[, f concave et $f(x) \leq 4e^{-2}(\mathrm{x} - 4)$,

c'est-à-dire $-4xe^{-x} \leq 4e^{-2}(\mathrm{x} - 4)$.

En particulier, pour x = 2,5, l'inégalité est vraie.

Dans ce cas, on a : $-4(2{,}5)e^{-2{,}5} \leq 4e^{-2}(2{,}5 - 4)$.

D'où : $-(2{,}5)e^{-2{,}5} \leq e^{-2}(-1{,}5)$.

Ce qui donne : $-(2{,}5) \leq \frac{e^{-2}}{e^{-2{,}5}}(-1{,}5)$, c.-à-d. $-(2{,}5) \leq e^{0{,}5}(-1{,}5)$

D'où : $e^{0{,}5} \leq \frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{5}{3}$, ce qu'il fallait démontrer.