exercice 9

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x$$

Position du problème

Nous nous proposons d'étudier la fonction f sur l'ensemble des réels.

Déterminons f '(x)

On a : $f'(x) = 3x^2 + 4(2x) + 4 = 3x^2 + 8x + 4.$

La fonction dérivée f ' est une fonction polynomiale de degré 2.

$f'(x) = ax^2 + bx + c$ avec a = 3, b = 8 et c =4.

Déterminons le discriminant Δ du trinôme $3x^2 + 8x + 4$.

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4(3)(4) = 64 - 48 = 16 = 4^2 > 0$

Le discriminant étant strictement positif, le trinôme admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-8-\sqrt{4^2}}{2(3)}$$

$$x_1 = \frac{-8-4}{6} \qquad x_2 = \frac{-8+4}{6}$$

$$x_1 = -2 \qquad x_2 = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

En vertu du cours sur les trinômes (c.f. programme de première), le signe du trinôme du second degré $3x^2 + 8x + 4$ est le signe de -3 (-a), c'est-à-dire négatif, entre les racines x_1 et x_2.

Le tableau de signe du trinôme est donc aisé à dresser.

x	-∞		-2		-2/3		+∞
Signe de $3x^2 + 8x + 4$		+	0	-	0	+	

Tableau de variation de la fonction f

x	-∞		-2		-2/3		+∞
Signe de f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

A la lecture du tableau de variation, il apparaît logique que nous cherchions à déterminer $f(-2)$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right)$, puis que nous déterminions $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Calculons $f(-2)$ et $f\left(-\frac{2}{3}\right)$.

On a : $f(-2) = (-2)^3 + 4(-2)^2 + 4(-2) = -8 + 16 - 8 = 0$

De plus : $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 4\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27} + \frac{16}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{8}{27} + \frac{48}{27} - \frac{72}{27} = -\frac{32}{27}$

Déterminons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On a : $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x = x^3\left(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$

Or : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0$, donc : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) = 1$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Complétons le tableau de variation de la fonction f

x	-∞		-2		-2/3		+∞
Signe de f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-∞	↗	0	↘	-32/27	↗	+∞

convexité

Nous souhaitons étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle]-∞ ; +∞[.

Déterminons f "(x).

On a : $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$. Donc : $f''(x) = 3(2x) + 8 = 6x + 8 = 2(3x + 4)$

Dressons le tableau de singe de f "(x).

x	-∞		-4/3		+∞
Signe de (3x + 4)		-	0	+	
Signe de f''(x)		-	0	+	

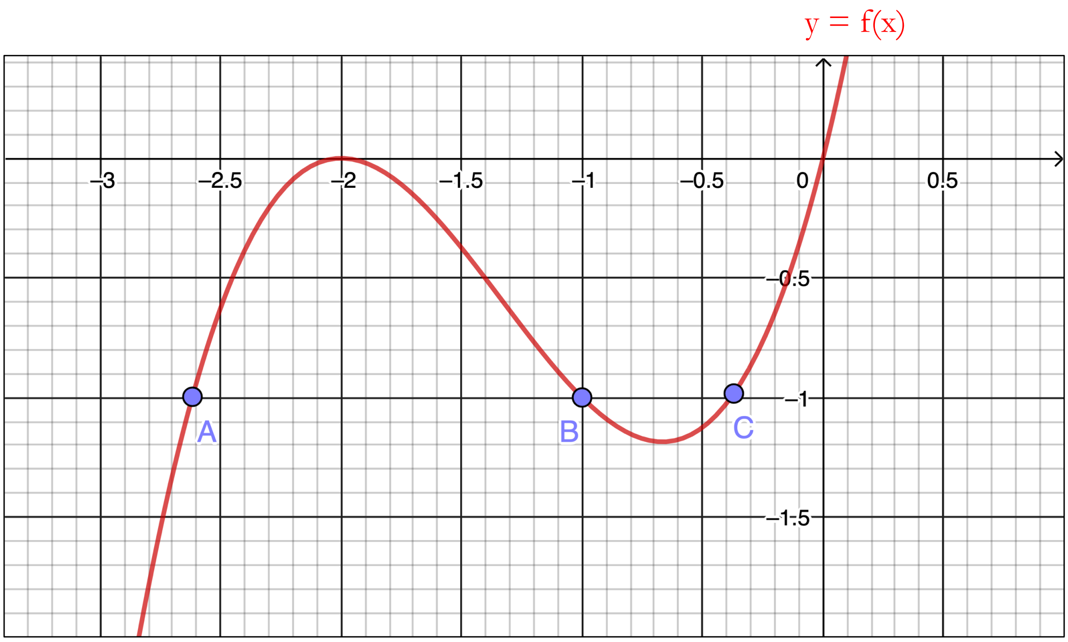
Conclusion

D'après le tableau de signe de f ", la fonction f est concave sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{4}{3}\right]$ et est convexe sur l'intervalle $\left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Le problème posé est de savoir s'il existe un réel c compris entre -3 et 0 tel que f(c) = -1.

D'après la courbe représentative de la fonction f ci-dessous, il existe sur l'intervalle [-3 ; 0] trois valeurs de x pour lesquelles f(x) = -1. Par lecture graphique, on peut estimer ces valeurs à environ -2,6, -1 et -0,38.



Examinons le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-3 ; 0].

x	-3	-2	-2/3	0
f(x)	↗	0	↘ -32/27 < -1	↗

A l'observation du tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-3 ; 0], il apparaît naturel de calculer f(-3) et f(0).

On a trivialement : f(0) = 0.

Calculons $f(-3)$.

$f(-2) = (-3)^3 + 4(-3)^2 + 4(-3) = -27 + 36 - 12 = -3$

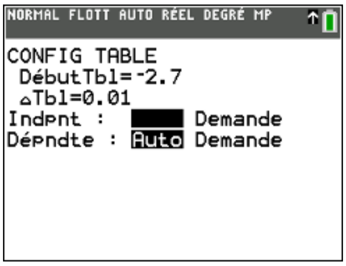
Tableau de variation complété de la fonction f sur l'intervalle [-3 ; 0].

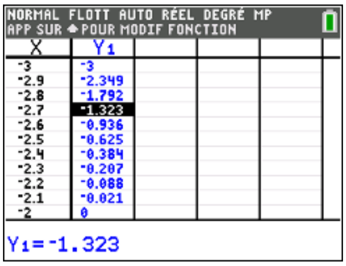
x	-3		α		-2		β		-2/3		γ		0
f(x)	-3	↗	-1	↗	0	↘	-1	↘	-32/27 < -1	↗	-1	↗	0

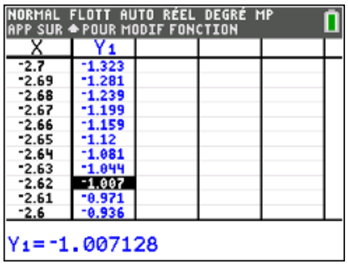
D'après le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-3 ; 0] et attendu que la fonction f est continue sur cet intervalle, il existe trois valeurs de x (α, β et γ) pour lesquelles f(x) = -1.

Déterminons un encadrement à 10^{-2} près du réel α.

Modélisons la fonction f à l'aide de la calculatrice et affichons un tableau de valeur adapté à la recherche de la solution du problème posé.







Par modélisation du problème à l'aide de la calculatrice nous obtenons le tableau de données ci-dessous :

x	f(x)
-2,62	-1,007
α	-1
-2,61	-0,971

En conséquence, on peut écrire : -2,62 < α < -2,61 ou α ∈ [-2,62 ; -2,61].

En réitérant le procédé, nous déterminerions sans difficultés un encadrement à 10^{-2} près des réels β et γ.