Exercice 84, page 249 (Parcours 1).

On considère la fonction f définie sur le domaine $]-\infty;5[\cup]5;+\infty[$ par $f(x)=6+\frac{1}{x-5}$.

Autrement dit, $f: x \longmapsto 6+\frac{1}{x-5}$.

Remarque : la flèche $\longmapsto$ est un symbole spécial caractérisant l'opération d'association à laquelle procède une fonction. Il ne s'agit pas d'une flèche simple comme $\longrightarrow$.

Déterminons f '(x)

$f(x)=6+\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=x-5$ et $u'(x)=1$ (On identifie la forme à dériver).

D'où : $f'(x)=-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}=-\frac{1}{[x-5]^2}<0$.

Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur son domaine de définition.

Tableau de variation de la fonction f

x	$-\infty$	$+5$	$+\infty$
Signe de f'(x)	$-$	‖	$-$
f(x)	$\searrow$	‖	$\searrow$

Étude des limites de la fonction en $\pm\infty$

On a : $f(x)=6+\frac{1}{x-5}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-5}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x-5}=0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+\frac{1}{x-5}\right)=6$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=6$.

Interprétation graphique

La droite (d)/y = 6 est une asymptote horizontale à la courbe (C_f)/ $y=6+\frac{1}{x-5}$.

Remarque : Le symbole "/" utilisé après (d) ou (C_f) signifie "telle que" ou encore "d'équation".

Étude des limites de la fonction à gauche et à droite de 5

On a : $f(x)=6+\frac{1}{x-5}$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}\left(\frac{1}{x-5}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}}\left(\frac{1}{x-5}\right)=+\infty$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}\left(6+\frac{1}{x-5}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}}\left(6+\frac{1}{x-5}\right)=+\infty$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x<5}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to5\\x>5}}f(x)=+\infty$

Interprétation graphique

La droite (d')/x = 5 est une asymptote verticale à la courbe (C_f)/ $y=6+\frac{1}{x-5}$.

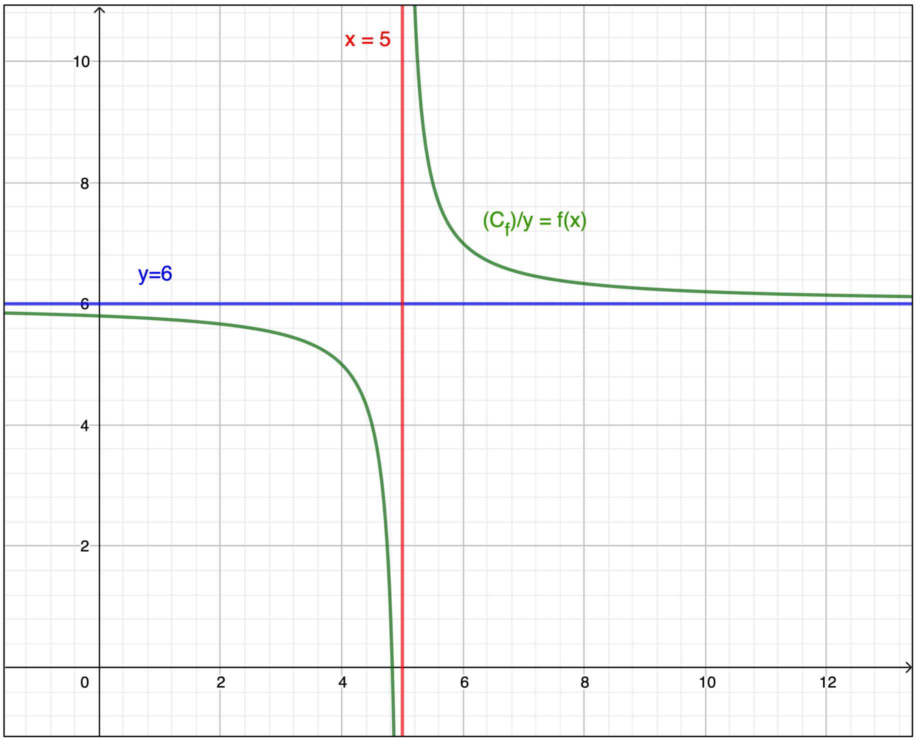
Représentation graphique de la fonction

La fonction f est représentée par une hyperbole notée (C_f) ou $(\mathcal{H})$ car f est une fonction homographique définie par une expression de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

On a en effet : $f(x) = 6 + \frac{1}{x-5} = \frac{6(x-5)}{x-5} + \frac{1}{x-5} = \frac{6(x-5)+1}{x-5} = \frac{6x-29}{x-5}$.

L'hyperbole a pour équation $y = 6 + \frac{1}{x-5}$ ou $y = \frac{6x-29}{x-5}$.

C'est-à-dire que chaque point M(x ; y) de l'hyperbole appartient à une même famille, la famille de tous les points du plan dont l'ordonnée y est égale à $6 + \frac{1}{x-5}$.



Étude de la convexité de la fonction f

Définitions

Une fonction f est dite convexe sur un intervalle I si et seulement si la dérivée seconde de la fonction est positive, c.-à-d. $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.

Interprétation graphique

Dans ce cas, la pente de la courbe augmente et sa courbure est dirigée vers le haut.

Une fonction f est dite concave sur un intervalle I si et seulement si la dérivée seconde de la fonction est négative, c.-à-d. $f''(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$.

Interprétation graphique

Dans ce cas, la pente de la courbe diminue et sa courbure est dirigée vers le bas.

En observant le graphique, on voit que f est concave sur $]-\infty; 5[$ est convexe sur $]5\,;+\infty[$.

On a : $f'(x) = -\frac{1}{[x-5]^2}$.

Déterminons f ''(x)

$f'(x) = -\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = [x-5]^2$ et $u'(x) = 2(x-5)$.

D'où : $f''(x) = -\left(-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right) = \frac{u'(x)}{[u(x)]^2} = \frac{2(x-5)}{([x-5]^2)^2} = \frac{2}{(x-5)^3}$.

Tableau de signe de f ''(x) et de variation de f '(x)

x	- ∞	+5	+∞
Signe de (x - 5)	-	‖	+
Signe de f''(x)	-	‖	+
f'(x)	↘	‖	↗

D'après le tableau ci-dessus,

— la fonction f est concave sur $]-\infty; 5[$. La courbe est courbée vers le bas.

— la fonction f est convexe sur $]5\,;+\infty[$. La courbe est courbée vers le haut.

Détermination de l'équation réduite de la tangente (T_6) à la courbe $(\mathcal{H})/y = 6 + \frac{1}{x-5}$ au point d'abscisse 6.

L'équation réduite de (T_6) s'écrit sous la forme $y = f'(6)(x-6) + f(6)$.

Calculons f(6) et f '(6)

On a : $f(6) = 6 + \frac{1}{6-5} = 7$

De plus : $f'(6) = -\frac{1}{[6-5]^2} = -1$

La tangente (T_6) passe donc par le point de coordonnées (6 ; 7) et a pour coefficient directeur - 1.

L'équation générale $y = f'(6)(x-6) + f(6)$ devient :

y = -1(x - 6) + 7, c.-à-d. y = - x + 13.

Conclusion : L'équation réduite de (T_6) s'écrit y = - x + 13.

Démontrons que la courbe est située au-dessus de la tangente (T_6) sur l'intervalle $]5; +\infty[$.

Déterminons f(x) - (-x + 13)

On a : $f(x) - (-x+13) = 6 + \frac{1}{x-5} - (-x+13) = 6 + \frac{1}{x-5} + x - 13 = \frac{1}{x-5} + x - 7$

Donc :

$$f(x) - (-x+13) = \frac{1}{x-5} + \frac{(x-7)(x-5)}{x-5} = \frac{1+(x-7)(x-5)}{x-5} = \frac{x^2-12x+36}{x-5}$$

D'où :

$f(x) - (-x + 13) = \frac{x^2 - 2x(6) + (6)^2}{x-5} = \frac{(x-6)^2}{x-5} > 0$ pour tout $x \in]5; +\infty[$.

Ainsi : $f(x) > -x + 13$ pour tout $x \in]5; +\infty[$.

En résultat, le courbe $(\mathcal{H})$ est située au-dessus de la tangente (T_6) sur l'intervalle $]5; +\infty[$.

Remarque : Ce type de démonstration est fréquente dans les problèmes du baccalauréat.