Exercice 90, page 249.

On considère la fonction f définie sur le domaine $]-2;+\infty[$ par $f(x) = x - \frac{x^2-6x+5}{x+2}$.

Déterminons f '(x)

$f(x) = x - \frac{x^2-6x+5}{x+2} = \frac{x(x+2)}{x+2} - \frac{x^2-6x+5}{x+2} = \frac{x^2+2x-(x^2-6x+5)}{x+2} = \frac{x^2+2x-x^2+6x-5}{x+2} = \frac{8x-5}{x+2}$

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 8x-5$ et $v(x) = x+2$

$u'(x) = 8$ et $v'(x) = 1$

D'où : $f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{8(x+2)-(8x-5)}{[x+2]^2} = \frac{8x+16-8x+5}{[x+2]^2} = \frac{21}{[x+2]^2} > 0.$

Par conséquent, la fonction f est strictement croissante sur son domaine de définition $]-2;+\infty[$.

Tableau de variation de la fonction f

x	- 2	$+\infty$
Signe de f'(x)	‖	+
f(x)	‖	↗

Étude de la limite de la fonction en $+\infty$

On a : $f(x) = \frac{8x-5}{x+2} = \frac{x\left(8-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\left(8-\frac{5}{x}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(8-\frac{5}{x}\right) = 8$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right) = 1.$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(8-\frac{5}{x}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)} = 8.$

Interprétation graphique

La droite (d)/y = 8 est une asymptote horizontale à l'hyperbole (C_f)/ $y = \frac{8x-5}{x+2}$.

Étude de la limite de la fonction à droite de - 2

On a : $f(x) = \frac{8x-5}{x+2}$ avec $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\frac{1}{x+2}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(8x-5) = -21.$

Par conséquent : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\left(\frac{8x-5}{x+2}\right) = -\infty$. D'où : $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = -\infty$

Interprétation graphique

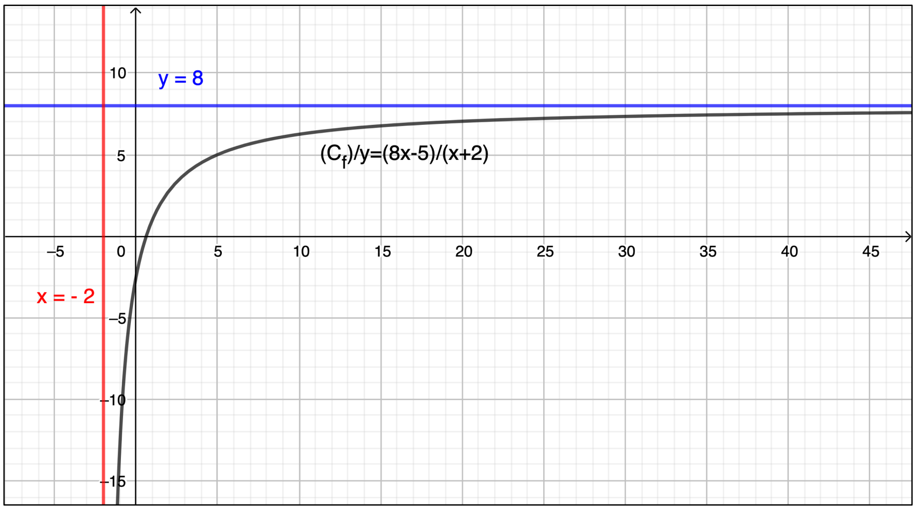
La droite (d')/x = - 2 est une asymptote verticale à l'hyperbole (C_f)/ $y = \frac{8x-5}{x+2}$.

Représentation graphique de la fonction

La fonction f est représentée par une hyperbole notée (C_f) ou $(\mathcal{H})$ car f est une fonction homographique définie par une expression de la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

L'hyperbole a pour équation $y = \frac{8x-5}{x+2}$.

C'est-à-dire que chaque point M(x ; y) de l'hyperbole appartient à une même famille, la famille de tous les points du plan dont l'ordonnée y est égale à $\frac{8x-5}{x+2}$, où x est l'abscisse dudit point.



Étude de la convexité de la fonction f

En observant le graphique, on voit que f est concave sur $]-2\,;+\infty[$.

On a : $f'(x) = \frac{21}{[x+2]^2}$.

Déterminons f ''(x)

$f'(x) = 21 \times \frac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = [x+2]^2$ et $u'(x) = 2(x+2)$.

D'où : $f''(x) = 21\left(-\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}\right) = -21\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} = -21\frac{2(x+2)}{([x+2]^2)^2} = -\frac{42}{(x+2)^3}$.

Tableau de signe de f ''(x) et de variation de f '(x)

x	- 2	$+\infty$
Signe de (x+2)	||	+
Signe de f''(x)	||	-
f'(x)	||	

D'après le tableau ci-dessus, la fonction f est concave sur $]-2\,;+\infty[$. La courbure de l'hyperbole est dirigée vers le bas.

Détermination de l'équation réduite de la tangente (T_5) à la courbe $(\mathcal{H})/y = \frac{8x-5}{x+2}$ au point de l'hyperbole d'abscisse 5.

L'équation réduite de (T_5) s'écrit sous la forme $y = f'(5)(x - 5) + f(5)$.

Calculons f(5) et f '(5)

On a : $f(5) = \frac{8(5)-5}{5+2} = \frac{35}{7} = 5$

De plus : $f'(5) = \frac{21}{[5+2]^2} = \frac{3\times 7}{7\times 7} = \frac{3}{7}$

La tangente (T_5) passe donc par le point de coordonnées (5 ; 5) et a pour coefficient directeur $\frac{3}{7}$.

L'équation générale $y = f'(5)(x - 5) + f(5)$ devient : $y = \frac{3}{7}(x-5) + 5 = \frac{3}{7}x - \frac{15}{7} + \frac{35}{7}$.

Conclusion : L'équation réduite de (T_5) s'écrit $y = \frac{3}{7}x + \frac{20}{7}$.

Démontrons que la courbe est située au-dessous de la tangente (T_5) sur l'intervalle $]-2; +\infty[$.

Étudions le signe de f(x) - $\left(\frac{3}{7}x + \frac{20}{7}\right)$.

On a : $f(x) - \left(\frac{3}{7}x + \frac{20}{7}\right) = \frac{8x-5}{x+2} - \left(\frac{3}{7}x + \frac{20}{7}\right) = \frac{8x-5}{x+2} - \left(\frac{3x+20}{7}\right) = \frac{7(8x-5)}{7(x+2)} - \frac{(3x+20)(x+2)}{7(x+2)}$

Donc : $f(x) - \left(\frac{3}{7}x + \frac{20}{7}\right) = \frac{7(8x-5)-(3x+20)(x+2)}{7(x+2)} = \frac{56x-35-3x^2-26x-40}{7(x+2)} = \frac{-3x^2+30x-75}{7(x+2)}$

D'où : $f(x) - \left(\frac{3}{7}x + \frac{20}{7}\right) = -3 \times \frac{(x^2-10x+25)}{7(x+2)} = \frac{-3(x^2-2x(5)+5^2)}{7(x+2)} = \frac{-3(x-5)^2}{7(x+2)} < 0$

Donc : $f(x) - \left(\frac{3}{7}x + \frac{20}{7}\right) < 0$ pour tout $x \in]-2; +\infty[$.

Ainsi : $f(x) < \frac{3}{7}x + \frac{20}{7}$ pour tout $x \in]-2; +\infty[$.

En résultat, l'hyperbole $(\mathcal{H})$ est située au-dessous de la tangente (T_5) sur l'intervalle $]-2; +\infty[$.