étude de fonction

Comment se structure l'étude d'une fonction ?

1. Intervalle de définition

La première question à se poser lorsqu'on étudie une fonction est celle du domaine sur lequel celle-ci est définie. Ce domaine est généralement précisé mais il est important d'y prêter une attention particulière, ou de le préciser si celui-ci ne l'a pas été.
Remarque : Le domaine de définition d'une fonction f se note $\mathcal{D}_f$.

Exemples
La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ a pour intervalle de définition [0, +∞[.
La fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{x-3}$ a pour domaine de définition]-∞ ; 3[∪]3 ; +∞[ou $\mathbb{R}\backslash\{3\}$.
La fonction affine h définie par h(x) = 2x + 5 a pour domaine de définition l'ensemble ℝ.

2. Parité de la fonction

Il est important d'examiner si la fonction étudiée est paire, impaire ou quelconque.

2.a. Si, pour tout réel x, f(-x) = f(x), alors la fonction est dite paire. Dans ce cas, sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées (Oy) pour axe de symétrie. Cette observation permet de limiter l'étude de la fonction considérée à l'intervalle [0, +∞[, la courbe étant constructible par symétrie axiale à partir de la moitié tracée dans le demi-plan.
2.b. Si, pour tout réel x, f(-x) = - f(x), alors la fonction est dite impaire. Dans ce cas, sa courbe représentative admet l'origine O du repère pour centre de symétrie. Cette observation permet aussi de limiter l'étude de la fonction considérée à l'intervalle [0, +∞[, la courbe étant cette fois constructible par symétrie centrale à partir de la moitié tracée.
2.c. Si la fonction étudiée n'est ni paire ni impaire, alors l'étude de la fonction doit se faire pour toutes les valeurs de son domaine de définition.

3. Étude des variations de la fonction

3.a. Détermination du nombre dérivé f '(x).
La détermination de f '(x) se fait après une identification claire de la forme de l'expression à dériver, parmi toutes les formes étudiées en classe et relevant du cours sur la dérivation.

Exemple 1
Si $f(x) = (2x + 1)e^x + 5$, alors on remarque que $f(x) = u(x)v(x) + 5$ avec $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = e^x$.
Dans ce cas, $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, la dérivée du nombre 5 étant nulle.

Exemple 2

Si $f(x) = 2x + 1 - \frac{e^{2x}}{x+1}$, alors il importe de remarquer que $f(x) = 2x + 1 - \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = e^{2x}$ et $v(x) = x + 1$.

Dans ce cas, $f'(x) = 2 - \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$, la dérivée de l'expression 2x + 1 étant 2.

3.b. Étude du signe du nombre dérivé f '(x).

L'étude du signe de f '(x) permet de déterminer pour quelles valeurs de x, f '(x) ≥ 0, et pour quelles valeurs de x, f '(x) ≤ 0.

Un tableau de signe peut s'avérer nécessaire pour une présentation claire des résultats.

3.c. Tableau de variation de la fonction f

Un tableau de variation comprend en général trois lignes tel que ci-dessous :

x	
Signe de f '(x)	
f(x)	

Si f '(x) ≥ 0 sur un intervalle I, alors la fonction f est croissante sur I.

Si f '(x) ≤ 0 sur un intervalle I, alors la fonction f est décroissante sur I.

Il est éventuellement utile de déterminer l'image par la fonction f de quelques valeurs remarquables sur le domaine d'étude.

3.d. Étude des limites en -∞ et +∞ de la fonction f.

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$, alors la droite d'équation y = a est une asymptote horizontale en $\pm\infty$ à la courbe représentative de la fonction f.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation x = a est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f.

4. Étude de la convexité de la fonction

L'étude de la convexité d'une fonction nécessite que l'on dérive la dérivée f '(x) de f(x) et que l'on étudie le signe du résultat. On parle de dérivée seconde f ''(x).

4.a. Si f ''(x) ≥ 0 sur un intervalle I, alors cela signifie que la dérivée f '(x) est croissante sur cet intervalle, autrement dit que la pente de la courbe représentative de la fonction f augmente sur I. On dit que la fonction est convexe sur I et que la courbure de la courbe est convexe.

4.b. Si f ''(x) ≤ 0 sur un intervalle I, alors cela signifie que la dérivée f '(x) est décroissante sur cet intervalle, autrement dit que la pente de la courbe représentative de la fonction f diminue sur I. On dit que la fonction est concave sur I et que la courbure de la courbe est concave.

5. Tracé d'une tangente

Il est fréquent que l'on demande de déterminer l'équation de la tangente (T_a) à la courbe (C_f) au point de la courbe d'abscisse a, puis que l'on demande de tracer ladite tangente.
Une équation de la tangente en question s'écrit sous la forme : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
La tangente passe par le point A(a, f(a)) et sa pente est f '(a).

6. Position relative de la courbe représentative de la fonction

Dans certains cas, il peut être demandé de déterminer si la courbe (C_f) représentative de la fonction f se trouve au-dessus ou au-dessous d'une droite (D) d'équation $y = ax + b$ ou d'une courbe (C_g) d'équation $y = g(x)$.

Comment faire ?

Si $f(x) \geq ax + b$ pour tout x appartenant à un intervalle I, alors la courbe (C_f) se trouve au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle I.
Si $f(x) \leq ax + b$ pour tout x appartenant à un intervalle I, alors la courbe (C_f) se trouve au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle I.

De la même manière :
Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout x appartenant à un intervalle I, alors la courbe (C_f) se trouve au-dessus de la courbe (C_g) sur l'intervalle I.
Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x appartenant à un intervalle I, alors la courbe (C_f) se trouve au-dessous de la courbe (C_g) sur l'intervalle I.

Pour comparer f(x) à (ax + b) ou à g(x), on détermine f(x) - (ax + b) ou f(x) - g(x), et on étudie le signe de l'expression obtenue, éventuellement à l'aide d'un tableau de signe.