évaluation de mathématiques

correction

Cours

Une suite (u_n) admet pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$ lorsque (si et seulement si) tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Exercice 1

On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1) $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2$ et $F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$.

2) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$F_0{}^2 + F_1{}^2 + \cdots + F_n{}^2 = F_n \times F_{n+1}$$

On considère la propriété P(n): "

$$F_0{}^2 + F_1{}^2 + \cdots + F_n{}^2 = F_n \times F_{n+1}$$

<u>Initialisation</u>

P(0) vraie ? A-t-on $\underbrace{F_0{}^2 + F_1{}^2 + \cdots + F_n{}^2}_{A} = \underbrace{F_n \times F_{n+1}}_{B}$ pour n = 0 ?

Pour n = 0, on a : A = $F_0{}^2 = 1^2 = 1$

B =$F_0 \times F_1 = 1 \times 1 = 1$

On a : A = B. Donc P(0) est vraie.

<u>Hérédité</u>

On suppose P(k) vraie, c'est-à-dire $F_0{}^2 + F_1{}^2 + \cdots + F_k{}^2 = F_k \times F_{k+1}$.

La propriété P(k+1) est-elle vraie ?

A-t-on $\underbrace{F_0{}^2 + F_1{}^2 + \cdots + F_k{}^2 + F_{k+1}{}^2}_{C} = \underbrace{F_{k+1} \times F_{k+2}}_{D}$?

On a : C=$F_0{}^2 + F_1{}^2 + \cdots + F_k{}^2 + F_{k+1}{}^2 = F_k \times F_{k+1} + F_{k+1}{}^2 = F_{k+1} \times (F_k + F_{k+1})$

Donc : C= $F_{k+1} \times F_{k+2} = D$. La propriété est héréditaire.

<u>Conclusion</u>

La propriété étant vraie pour n = 0 (initialisation) et étant héréditaire, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout n ≥ 0.

Exercice 2

On considère la suite (d_n) définie par : $d_n = \frac{2n^2+12n+6}{n+3}$

1) Montrons que pour tout entier n, $d_n = 2n + 6 - \frac{12}{n+3}$

$$2n + 6 - \frac{12}{n+3} = \frac{(2n+6)(n+3)}{n+3} - \frac{12}{n+3} = \frac{(2n+6)(n+3) - 12}{n+3}$$

Donc : $2n + 6 - \frac{12}{n+3} = \frac{2n^2+6n+6n+18-12}{n+3} = \frac{2n^2+12n+62}{n+3} = d_n$ cqfd

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$.

$d_n = 2n + 6 - \frac{12}{n+3}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+6) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{12}{n+3}\right) = 0$.

D'après les propriétés des limites de suites, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = +\infty$.

Problème

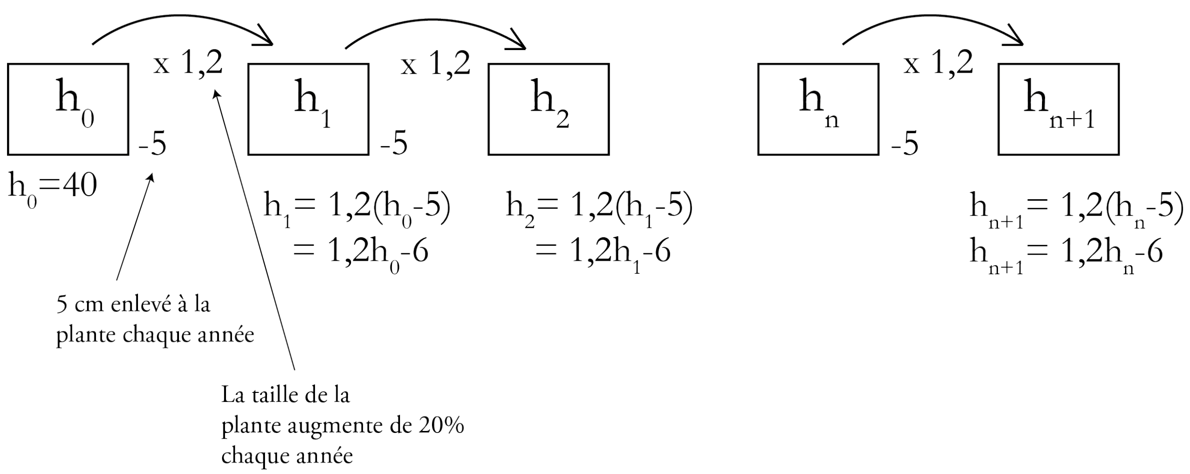
En novembre 2019, Sophia achète une plante qui mesure 40 cm. Il lui est conseillé chaque année de tailler sa plante en la coupant de 5 cm, de sorte que celle-ci pousse et voit sa hauteur s'accroître d'un cinquième.

On note h_n la hauteur de la plante (exprimée en cm), juste avant sa coupe, en novembre 2019 + n.

Traduisons l'énoncé par un schéma.

Évolution de la taille d'une plante en cm

Augmenter de un cinquième revient à multiplier par 1 + 1/5 = 1,2



1) D'après le schéma, on a trivialement :

$$h_{n+1} = 1{,}2h_n - 6$$

2) Démontrons par un raisonnement par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$h_n \geq 30 + 0{,}2n$$

On considère la propriété P(n) : "$h_n \geq 30 + 0{,}2n$ "

<u>Initialisation</u>

P(0) vraie ? A-t-on $\underbrace{h_n}_{A} \geq \underbrace{30 + 0{,}2n}_{B}$ pour $n = 0$?

Pour $n = 0$, on a : $A = h_0 = 40$

$$B = 30 + 0{,}2(0) = 30$$

On a : $A \geq B$. Donc P(0) est vraie.

<u>Hérédité</u>

On suppose P(k) vraie, c'est-à-dire $h_k \geq 30 + 0{,}2k$.

La propriété P(k+1) est-elle vraie ?

A-t-on $\underbrace{h_{k+1}}_{C} \geq \underbrace{30 + 0{,}2(k+1) = 30 + 0{,}2k + 0{,}2}_{D}$?

On a : $C = h_{k+1} = 1{,}2h_k - 6 \geq 1{,}2(30 + 0{,}2k) - 6$

Donc : $C \geq 30 + 6 + 0{,}2k + 0{,}04k - 6$.

D'où : $C \geq 30 + 0{,}2k + 0{,}04k$

Pour que C soit supérieur ou égal à D, il faut que : $0{,}04k \geq 0{,}2$

C'est-à-dire : $k \geq 5$.

La récurrence fonctionnera à partir du rang 5 si P(5) vraie.

Ce qui est le cas car :

$$h_1 = 42 \geq 30 + 0{,}2(1) = 30{,}2$$

$$h_2 = 44{,}4 \geq 30 + 0{,}2(2) = 30{,}4$$

$$h_3 = 47{,}28 \geq 30 + 0{,}2(3) = 30{,}6$$

$$h_4 = 50{,}736 \geq 30 + 0{,}2(4) = 30{,}8$$

$$h_5 = 54{,}8632 \geq 30 + 0{,}2(5) = 40$$

La propriété est héréditaire.

<u>Conclusion</u>

La propriété étant vraie pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et 5 (initialisation) et étant héréditaire à partir du rang 5, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 0$.

3) Déterminons $\lim_{n\to\infty} h_n$.

On a : $h_n \geq 30 + 0{,}2n$ avec $\lim_{n\to\infty}(30 + 0{,}2n) = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison (cours), on a : $\lim_{n\to\infty} h_n = +\infty$.

4) On considère l'algorithme écrit en langage naturel ci-dessous.

a) Algorithme renvoyant le rang de la suite (h_n) à partir duquel tous les termes h_n dépassent strictement 60.

```
 0 → N
 40 → H
Tant que H ≤ 60
    N + 1 → N
    1.2*H - 6 → H
Fin Tant que
Afficher N
```

b) Le programme comporte une erreur de variable. La variable U n'est pas définie et ne peut pas être utilisée dans la condition testée. Une instruction correcte serait : while H <= seuil:

```
def rang(seuil):
    H = 40
    N = 0
    while U <= seuil:
        H = 1.2*H - 6
        N+=1
    return N
```

c) Par tabulation à l'aide la calculatrice, on observe que la plante dépassera 60 cm après 7 années.