

évaluation de mathématiques

Cours

Quand dit-on qu'une suite (u_n) admet pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 1

On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 1, F_1 = 1$ et par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1) Calculer F_2 et F_3 .

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$$

Exercice 2

On considère la suite (d_n) définie par :

$$d_n = \frac{2n^2 + 12n + 6}{n + 3}$$

1) Montrer que pour tout n ,

$$d_n = 2n + 6 - \frac{12}{n + 3}$$

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$.

Problème

En novembre 2019, Sophia achète une plante qui mesure 40 cm. Il lui est conseillé chaque année de tailler la plante en la coupant de 5 cm, de sorte que celle-ci pousse et voit sa hauteur s'accroître d'un cinquième.

On note h_n la hauteur de la plante (exprimée en cm), juste avant sa coupe, en novembre 2019 + n .

1) Justifier que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$h_{n+1} = 1,2h_n - 6$$

2) Démontrer par un raisonnement par récurrence que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$h_n \geq 30 + 0,2n$$

3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n$.

4) On considère l'algorithme écrit en langage naturel ci-dessous.

a) Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il renvoie le rang de la suite (h_n) à partir duquel tous les termes h_n dépassent strictement 60.

```
0 → N
[ ] → H
Tant que H ≤ [ ]
    N + 1 → N
    [ ] → U
Fin Tant que
Afficher N
```

b) Le programme ci-dessous implémente en Python, via une fonction, l'algorithme ci-dessus mais celui-ci comporte une erreur. Laquelle ?

```
def rang(seuil):
    H = 40
    N = 0
    while U <= seuil:
        H = 1.2*H - 6
        N+=1
    return N
```

c) Au bout de combien d'années la plante dépassera-t-elle 60 cm ?