Exercices - Opérations sur les limites.

Pour les exercices 53 et 54, étudier la limite de chaque suite.

53 **a)** Pour tout entier naturel n, $u_n = n + n^2$.

b) Pour tout entier naturel n, $v_n = n\sqrt{n}$.

c) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $w_n = 2n - \dfrac{1}{n}$.

d) Pour tout entier naturel n, $h_n = \dfrac{1}{n^2 + 3}$.

54 **a)** Pour tout entier naturel n, $u_n = 8{,}2 - 4\sqrt{n}$.

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{4}{n} + \dfrac{2}{\sqrt{n}} + 1$.

c) Pour tout entier naturel n, $w_n = (8 - n)(2n^2 + 1)$.

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $a_n = \left(5 - \dfrac{1}{n}\right)(2 - \sqrt{n})$.

e) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $b_n = \dfrac{4 + n}{2 - \dfrac{1}{n}}$.

f) Pour tout entier naturel n, $c_n = \dfrac{40}{2n + 3}$.

44 (c_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $c_n = \dfrac{2^n}{n}$.

a) Tabuler la suite (c_n) à l'écran de la calculatrice et conjecturer sa limite.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,

$$n^2 - 2n - 1 \geqslant 0.$$

c) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 4$,

$$2n^2 \geqslant (n + 1)^2.$$

d) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

e) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $c_n \geqslant n$.

f) Démontrer la conjecture émise à la question **a)**.

77 (u_n) est la suite définie par $u_1 = 0$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \dfrac{nu_n}{n + 1} + n$.

a) Tabuler et représenter graphiquement la suite (u_n) à l'écran de la calculatrice. Conjecturer sa limite.

b) En s'appuyant sur la représentation graphique et sur les premiers termes, conjecturer une expression de $3u_n + 1$ en fonction de n.

c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{3}n^2 - \dfrac{1}{3}$. En déduire la limite de la suite (u_n).