

La suite de Héron d'Alexandrie

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, $u_0 > 0$.

1. Montrer que $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction que l'on précisera.
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

n	u_n
0	2
1	
2	
3	
4	

3. Comparer $\sqrt{2}$ à la valeur vers laquelle tend la suite (u_n) .
4. On considère l'algorithme ci-dessous. Compléter le tableau détaillant son fonctionnement et indiquer ce que fait cet algorithme.

$U \leftarrow 2$
 Pour n allant de 1 à 3, faire

$$U \leftarrow \frac{1}{2}\left(U + \frac{2}{U}\right)$$

 Afficher U

n	U

5. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
6. On admet que la suite (u_n) tend vers la limite ℓ . Expliquer pourquoi cette limite est solution de l'équation $f(x) = x$.
7. Déterminer $f'(x)$ et étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
8. Représenter schématiquement la courbe représentative de la fonction f sur $]0; 3[$.
9. On considère le graphique joint en ANNEXE. Placer sur ce graphique les valeurs de u_0 , u_1 , u_2 et u_3 .

ANNEXE

