Application du théorème de convergence

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \geq 0$

où f est la fonction définie par $f(x) = \frac{6x+1}{x+1}$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que $5 \leq \alpha \leq 6$.
3. Démontrer que $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.
4. Démontrer que la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$.
5. A l'aide de GeoGebra ou de la courbe jointe en ANNEXE, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) lorsque $u_0 = 0$.

On suppose que $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$.

6. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Que peut-on conclure quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
7. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $0 \leq u_n \leq \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

   Que peut-on dire de la suite (u_n) ?
8. En vertu de quel théorème peut-on conclure que la suite (u_n) est convergente ?
9. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

ANNEXE