Application du théorème des gendarmes

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) \end{cases}$$

1. Comment appelle-t-on la suite définie ci-dessus ?
2. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n > 0$ pour tout entier naturel n.
3. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n - \sqrt{2} \geq 0$ pour tout entier naturel n.
4. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout entier naturel n.
5. En déduire la limite ℓ de la suite (u_n).
6. Vérifier que ℓ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.