

suites arithmético-géométriques

Problème 1

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.

Pour l'ouverture prévue le 1^{er} janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013 + n).

On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

Variables :
U, N

Initialisation :
Mettre 42 dans U
Mettre 0 dans N

Traitement :
Tant que U < 100
 U prend la valeur $U \times 0,95 + 6$
 N prend la valeur N + 1
Fin du Tant que

Sortie
Afficher N.

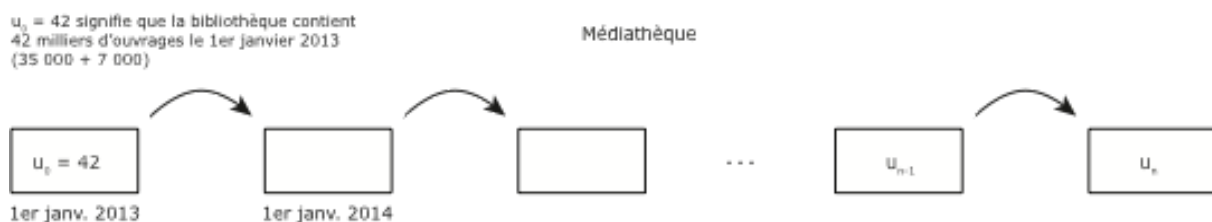
3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.

On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année (2013 + n).

4. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

Compléter le schéma esquissé ci-dessous afin de traduire l'énoncé d'une manière claire.



Problème 2

Un centre aéré, ouvert tous les mercredis après midi à partir du 1^{er} septembre, propose aux enfants de s'inscrire chaque semaine à une activité. L'une de ces activités est la natation.

Une étude effectuée sur l'année scolaire 2009/2010 montre que d'une semaine sur l'autre 5 % des enfants ne se réinscrivent pas à la natation, alors que dans le même temps 10 nouveaux enfants s'y inscrivent.

Le directeur se base sur les résultats de l'année scolaire 2009/2010 pour prévoir l'évolution des inscriptions pour l'année scolaire 2010/2011.

La première semaine de l'année scolaire 2010/2011, 80 enfants se sont inscrits à la natation. On note u_0 le nombre initial d'enfants inscrits à la natation, ainsi $u_0 = 80$.

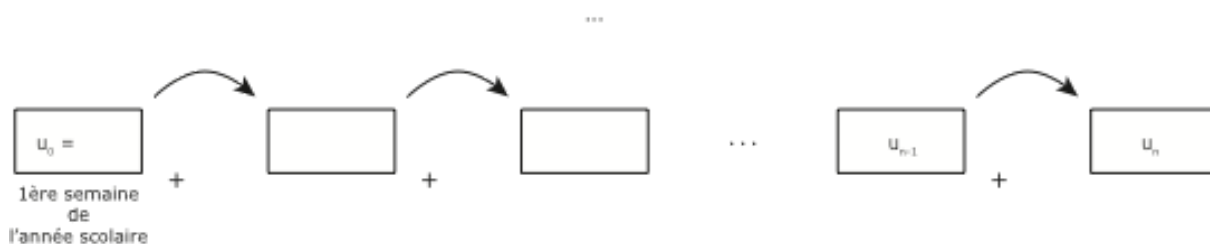
Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'enfants inscrits à la natation au bout de n semaines.

1. Montrer que $u_1 = 86$.
2. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = u_n - 200$. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
Pour tout entier naturel n , exprimer a_n en fonction de n . En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 200 - 120 \times 0,95^n$.

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - u_n = 6 \times 0,95^n$. En déduire que le nombre d'inscriptions à la natation augmente toutes les semaines.
5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Après combien de semaines, le contexte restant le même, le nombre d'enfants inscrits à la piscine dépassera-t-il 150 ?

Compléter le schéma esquissé ci-dessous afin de traduire l'énoncé d'une manière claire.



En déduire les réponses aux questions 1. et 2.