correction

1. La suite (u_n) est la suite dite de Héron d'Alexandrie.

2. On considère la propriété $P(n)$: "$u_n > 0$" . Démontrons par un raisonnement par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

   Initialisation

   A-t-on $P(0)$ vraie ? Autrement dit, a-t-on $A > 0$ où $A = u_n$ pour n = 0 ?

   Pour n = 0, on a : $A = u_0 = 2 > 0$. Donc $P(0)$ vraie.

   Hérédité

   Supposons $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $u_k > 0$.

   A-t-on $P(k+1)$ vraie ? Autrement dit, a-t-on $A > 0$ où $A = u_{k+1}$?

   On a : $A = u_{k+1} = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{2}{u_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{{u_k}^2+2}{u_k}\right) > 0$ car $u_k > 0$. Donc $P(k+1)$ vraie.

   L'hérédité est vérifiée.

   Conclusion

   La propriété étant vraie pour n = 0 et étant héréditaire, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

   On dit que la suite (u_n) est une suite à termes strictement positifs.

3. Démontrons par un raisonnement par récurrence que $u_n - \sqrt{2} \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$..

   On considère la propriété $P(n)$: "$u_n - \sqrt{2} \geq 0$" . Démontrons par un raisonnement par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier naturel n.

   Initialisation

   A-t-on $P(0)$ vraie ? Autrement dit, a-t-on $A \geq 0$ où $A = u_n - \sqrt{2}$ pour n = 0 ?

   Pour n = 0, on a : $A = u_0 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} \geq 0$. Donc $P(0)$ vraie.

   Hérédité

   Supposons $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $u_k - \sqrt{2} \geq 0$.

   A-t-on $P(k+1)$ vraie ? Autrement dit, a-t-on $A \geq 0$ où $A = u_{k+1} - \sqrt{2}$?

   On a : $A = u_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{2}{u_k}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{{u_k}^2+2}{u_k}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{{u_k}^2-2\sqrt{2}u_k+2}{u_k}\right)$

   C'est-à-dire : $A = u_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{{u_k}^2-2\sqrt{2}u_k+2}{2u_k} = \frac{{u_k}^2-2u_k\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{2u_k} = \frac{(u_k-\sqrt{2})^2}{2u_k} \geq 0$.

   Donc $P(k+1)$ vraie. L'hérédité est vérifiée.

   Conclusion

   La propriété étant vraie pour n = 0 et étant héréditaire, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

4. Démontrons par un raisonnement par récurrence que $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   On considère la propriété $P(n)$: "$u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$" . Démontrons par un raisonnement par récurrence que la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation

   A-t-on $P(1)$ vraie ? Autrement dit, a-t-on $A \leq B$ où $A = u_n - \sqrt{2}$ et $B = \frac{1}{2^n}$" pour n = 1 ?

   Pour n = 1, on a : $A = u_1 - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{2}\right) - \sqrt{2} = \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0{,}1.$

   $B = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

   Donc $A \leq B$. $P(0)$ vraie.

   Hérédité

   Supposons $P(k)$ vraie, c'est-à-dire $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^k}$.

   A-t-on $P(k+1)$ vraie ? Autrement dit, a-t-on $A \leq B$ où $A = u_{k+1} - \sqrt{2}$ et $B = \frac{1}{2^{k+1}}$" ?

   On a : $A = u_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_k + \frac{2}{u_k}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_k{}^2+2}{u_k}\right) - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_k{}^2-2\sqrt{2}u_k+2}{u_k}\right)$

   C'est-à-dire : $A = u_{k+1} - \sqrt{2} = \frac{u_k{}^2-2\sqrt{2}u_k+2}{2u_k} = \frac{u_k{}^2-2u_k\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{2u_k} = \frac{(u_k-\sqrt{2})^2}{2u_k}$

   Donc : $A = \frac{(u_k-\sqrt{2})(u_k-\sqrt{2})}{2u_k} \leq \frac{(u_k-\sqrt{2})}{2u_k} \times \frac{1}{2^k} = \frac{(u_k-\sqrt{2})}{u_k} \times \frac{1}{2\times 2^k}$

   $A = \frac{(u_k-\sqrt{2})}{u_k} \times \frac{1}{2^{k+1}} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{u_k}\right) \times \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$ car, d'après la question 3, on a : $u_n - \sqrt{2} \geq 0$,

   donc : $u_n \geq \sqrt{2}$, c'est-à-dire : $0 < \frac{\sqrt{2}}{u_n} \leq 1$, d'où : $0 \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{u_k} < 1$.

   Donc $P(k+1)$ vraie. L'hérédité est vérifiée.

   Conclusion

   La propriété étant vraie pour n = 0 et étant héréditaire, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

5. Déterminons la limite ℓ de la suite (u_n).

   On a : $u_n - \sqrt{2} \geq 0$ et $u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$.

   Donc : $0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$

   Or : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

   D'après le théorème des gendarmes, la suite $\left(u_n - \sqrt{2}\right)$ étant encadrée par deux suites, l'une nulle, l'autre convergeant vers 0, elle converge vers 0.

   La limite de la suite $\left(u_n - \sqrt{2}\right)$ étant zéro, cela signifie que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sqrt{2}$.

6. Vérifions que $\sqrt{2}$ est solution de l'équation $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

   Posons $A = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$. A-t-on $A = \sqrt{2}$ quand $x = \sqrt{2}$?

   Pour $x = \sqrt{2}$, on a : $A = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$.

   La limite de la suite (u_n) est bien solution de l'équation $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.