

# évaluation de mathématiques

## correction

---

### exercice 1

On considère la suite de Fibonacci  $(F_n)$  définie par  $F_0 = 1, F_1 = 1$  et par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1)  $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 1 = 2$  et  $F_3 = F_2 + F_1 = 2 + 1 = 3$ .

2) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$$

On considère la propriété  $P(n)$ : "

$$F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}$$

#### Initialisation

$P(0)$  vraie ? A-t-on  $\underbrace{F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_n^2}_A = \underbrace{F_n \times F_{n+1}}_B$  pour  $n = 0$  ?

Pour  $n = 0$ , on a :  $A = F_0^2 = 1^2 = 1$

$$B = F_0 \times F_1 = 1 \times 1 = 1$$

On a :  $A = B$ . Donc  $P(0)$  est vraie.

#### Hérédité

On suppose  $P(k)$  vraie, c'est-à-dire  $F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_k^2 = F_k \times F_{k+1}$ .

La propriété  $P(k+1)$  est-elle vraie ?

A-t-on  $\underbrace{F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2}_C = \underbrace{F_{k+1} \times F_{k+2}}_D$  ?

$$\text{On a : } C = F_0^2 + F_1^2 + \dots + F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_k \times F_{k+1} + F_{k+1}^2 = F_{k+1} \times (F_k + F_{k+1})$$

Donc :  $C = F_{k+1} \times F_{k+2} = D$ . La propriété est héréditaire.

#### Conclusion

La propriété étant vraie pour  $n = 0$  (initialisation) et étant héréditaire, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

---

## exercice 2

On considère la suite  $(d_n)$  définie par :  $d_n = \frac{2n^2+12n+6}{n+3}$

1) Montrons que pour tout entier  $n$ ,  $d_n = 2n + 6 - \frac{12}{n+3}$

$$2n + 6 - \frac{12}{n+3} = \frac{(2n+6)(n+3)}{n+3} - \frac{12}{n+3} = \frac{(2n+6)(n+3) - 12}{n+3}$$

$$\text{Donc : } 2n + 6 - \frac{12}{n+3} = \frac{2n^2+6n+6n+18-12}{n+3} = \frac{2n^2+12n+6}{n+3} = d_n \text{ cqfd}$$

2) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ .

$$d_n = 2n + 6 - \frac{12}{n+3} \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 6) = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{12}{n+3}\right) = 0.$$

D'après les propriétés des limites de suites, on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$ .

## problème

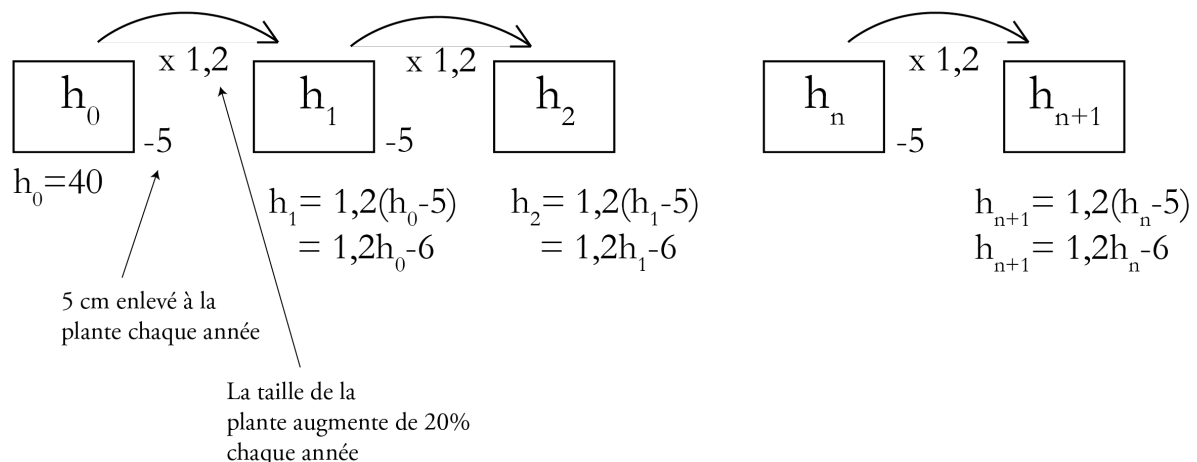
En novembre 2019, Sophia achète une plante qui mesure 40 cm. Il lui est conseillé chaque année de tailler sa plante en la coupant de 5 cm, de sorte que celle-ci pousse et voit sa hauteur s'accroître d'un cinquième.

On note  $h_n$  la hauteur de la plante (exprimée en cm), juste avant sa coupe, en novembre 2019 +  $n$ .

Traduisons l'énoncé par un schéma.

### Évolution de la taille d'une plante en cm

Augmenter de un cinquième revient à multiplier par  $1 + 1/5 = 1,2$



1) D'après le schéma, on a trivialement :

$$h_{n+1} = 1,2h_n - 6$$

2) Démontrons par un raisonnement par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$h_n \geq 30 + 0,2n$$

On considère la propriété  $P(n)$  : " $h_n \geq 30 + 0,2n$  "

### Initialisation

$P(0)$  vraie ? A-t-on  $\underbrace{h_n}_A \geq \underbrace{30 + 0,2n}_B$  pour  $n = 0$  ?

Pour  $n = 0$ , on a :  $A = h_0 = 40$

$$B = 30 + 0,2(0) = 30$$

On a :  $A \geq B$ . Donc  $P(0)$  est vraie.

### Hérédité

On suppose  $P(k)$  vraie, c'est-à-dire  $h_k \geq 30 + 0,2k$ .

La propriété  $P(k+1)$  est-elle vraie ?

A-t-on  $\underbrace{h_{k+1}}_C \geq \underbrace{30 + 0,2(k+1)}_D = 30 + 0,2k + 0,2$  ?

On a :  $C = h_{k+1} = 1,2h_k - 6 \geq 1,2(30 + 0,2k) - 6$

Donc :  $C \geq 30 + 6 + 0,2k + 0,04k - 6$ .

D'où :  $C \geq 30 + 0,2k + 0,04k$

Pour que  $C$  soit supérieur ou égal à  $D$ , il faut que :  $0,04k \geq 0,2$

C'est-à-dire :  $k \geq 5$ .

La récurrence fonctionnera à partir du rang 5 si  $P(5)$  vraie.

Ce qui est le cas car :

$$h_1 = 42 \geq 30 + 0,2(1) = 30,2$$

$$h_2 = 44,4 \geq 30 + 0,2(2) = 30,4$$

$$h_3 = 47,28 \geq 30 + 0,2(3) = 30,6$$

$$h_4 = 50,736 \geq 30 + 0,2(4) = 30,8$$

$$h_5 = 54,8632 \geq 30 + 0,2(5) = 40$$

La propriété est héréditaire.

### Conclusion

La propriété étant vraie pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  et  $5$  (initialisation) et étant héréditaire à partir du rang 5, d'après le théorème de récurrence, elle est vraie pour tout  $n \geq 0$ .

3) Déterminons  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n$ .

On a :  $h_n \geq 30 + 0,2n$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} (30 + 0,2n) = +\infty$ .

D'après le théorème de comparaison (cours), on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = +\infty$ .

4) On considère l'algorithme écrit en langage naturel ci-dessous.

a) Algorithme renvoyant le rang de la suite  $(h_n)$  à partir duquel tous les termes  $h_n$  dépassent strictement 60.

```
N ← 0
H ← 40
Tant que H ≤ 60
  N ← N + 1
  H ← 1.2*H - 6
Fin Tant que
Afficher N
```

b) Le programme comporte une erreur de variable. La variable U n'est pas définie et ne peut pas être utilisée dans la condition testée. Une instruction correcte serait :  
while  $H \leq$  seuil:

```
def rang(seuil):
    H = 40
    N = 0
    while H <= seuil:
        H = 1.2*H - 6
        N+=1
    return N
```

c) Par tabulation à l'aide la calculatrice, on observe que la plante dépassera 60 cm après 7 années.