Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

Déterminons $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

On a : $u_n = \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

Or : $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

Donc : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \frac{1}{n} + 5$$

Déterminons $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

On a : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 5\right)$.

Or : $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, donc : $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n} + 5\right) = 5$. D'où : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 5$.

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

Déterminons $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

On a : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{+\infty}{+\infty}$ **Forme indéterminée**

Or : $u_n = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$ avec $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$.

Donc : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{40n+1}{n^2+2}$$

Déterminons $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

On a : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{40n+1}{n^2+2}\right) = \frac{+\infty}{+\infty}$ **Forme indéterminée**

Or : $u_n = \frac{40n+1}{n^2+2} = \frac{40n\left(1+\frac{1}{40n}\right)}{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)} = \frac{40}{n} \times \frac{1+\frac{1}{40n}}{1+\frac{2}{n^2}}$ avec $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{40n}\right) = 1$

et $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) = 1$.

D'où : $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{40}{n} = 0$.

Exercice 5

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n} + 1$$

Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} + 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 = 1$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Exercice 6

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 3}$$

Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n^2}} = 1$

Exercice 7

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \frac{4}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} + 1$$

Déterminons $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} + 1\right) = 1$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 0$.

Exercice 8

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \left(5 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \sqrt{n}\right)$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

On a : $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 5\left(2 - \sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(-5\sqrt{n}\right) = -\infty$.