suites arithmético-géométriques
Le corrigé

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation

$$u_{n+1} = au_n + b \quad (a \text{ et } b \text{ réels non nuls tels que } a \neq 1).$$

On pose, pour tout entier naturel n, $\quad v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.

2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

1. D'après l'énoncé, on a : $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$, donc : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a}$.

   D'où : $v_{n+1} = au_n + b - \frac{b}{1-a}$ car $u_{n+1} = au_n + b$

   Donc : $v_{n+1} = au_n + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a} = au_n - \frac{ab}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$

   Conclusion : $v_{n+1} = av_n$

   La suite (v_n) est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \frac{b}{1-a}$

2. La suite (v_n) étant une suite géométrique, on a : $v_n = a^n v_0$

   D'où, comme $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$, on a : $u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = a^n v_0 + \frac{b}{1-a}$

   Or, si -1 < a < 1, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a^n v_0 = 0$

   D'après les propriétés des limites de suites, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \frac{b}{1-a}$