Cours et exercices sur les limites finies de suites

Le cours - Limite finie

Soit la suite (u_n) définie par :	Limite
$u_n = q^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et -1$< q < 1$	0
$u_n = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	0
$u_n = \frac{1}{n^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	0
$u_n = \frac{1}{n^3}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	0
$u_n = \frac{1}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$	0
$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	0

Exercice 1
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 2
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \frac{1}{n} + 5$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 3
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 4
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{40n+1}{n^2+2}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 5
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n} + 1$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 6
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 3}$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 7
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \frac{4}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} + 1$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 8
Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par :

$$u_n = \left(5 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \sqrt{n}\right)$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Cours sur les limites (suite)

Théorème de convergence - Suite croissante (admis)
Toute suite croissante (u_n) et majorée par un majorant M, c'est-à-dire telle que $u_n < M$ pour tout entier naturel n, admet une limite finie ℓ (inférieure ou égale à M).

Théorème de convergence - Suite décroissante (admis)
Toute suite décroissante (u_n) et minorée par un minorant m, c'est-à-dire telle que $m < u_n$ pour tout entier naturel n, admet une limite finie ℓ (supérieure ou égale à m).

Théorème de comparaison (admis)
Soient deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ' et telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.

On a : $\ell \leq \ell'$

Théorème des gendarmes (admis)
Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Pour chaque suite (u_n) définie ci-après, déterminer la limite :

1. $u_n = (-0,9)^n$
2. $u_n = \frac{1}{3^n}$
3. $u_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$
4. $u_n = 2^n$
5. $u_n = -3 \times (1,2)^n$
6. $u_n = 4 \times (0,8)^n$
7. $u_n = \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$
8. $u_n = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$
9. $u_n = \frac{3}{2n+4}$
10. $u_n = n^2 + 4n$
11. $u_n = \frac{2n^2-4n+5}{3n^2}$
12. $u_n = \frac{n^2-2n+3}{4n^3+5}$
13. $u_n = \frac{-3n+2}{n^2+1}$
14. $u_n = \frac{2\times 3^n+1}{3^n+4}$
15. $u_n = \frac{5^n+3^n}{4^n}$
16. $u_n = \frac{1+2^n}{5^n}$
17. $u_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} + 1$
18. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2n}$
19. $u_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n}}$
20. $u_n = \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$