Devoir de mathématiques

Problème

Les six compétences inscrites au programme seront évaluées : recherche, modélisation, représentation, communication, calcul et raisonnement. Une affirmation non justifiée ne constitue pas une argumentation valide.

En novembre 2019, Sophia achète une plante qui mesure 40 cm. Il lui est conseillé chaque année de tailler sa plante en la coupant de 5 cm, de sorte que celle-ci pousse et voit sa hauteur s'accroître d'un cinquième. On note h_n la hauteur de la plante (exprimée en cm), juste avant sa coupe, en novembre 2019 + n.

1) Montrer, par un schéma clair et illustré que, pour tout entier n ≥ 0, on a :

$$h_{n+1} = 1{,}2h_n - 6$$

2) Démontrer par un raisonnement par récurrence que, pour tout entier n ≥ 0,

$$h_n \geq 30 + 0{,}2\text{n}$$

3) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} h_n$.

4) On considère l'algorithme écrit en langage naturel ci-dessous.

   a) Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il renvoie le rang de la suite (h_n) à partir duquel tous les termes h_n dépassent strictement 60.

```
N ← 0
H ←
Tant que H ≤
      H ←
     N ←  N + 1
Fin Tant que
Afficher
```

   b) Le programme ci-dessous implémente en Python l'algorithme ci-dessus mais contient une erreur. Laquelle ?

```python
def rang(seuil):
    H = 40
    N = 0
    while U <= seuil:
        H = 1.2*H - 6
        N+=1
    return N
```

   c) Au bout de combien d'années la plante dépassera-t-elle 60 cm ?

5) Représenter graphiquement la suite (h_n) à l'aide de GeoGebra ou d'un tableur.

Exercice 1

On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et par :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1) Calculer F_2 et F_3.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$${F_0}^2 + {F_1}^2 + \cdots + {F_n}^2 = F_n \times F_{n+1}$$

Exercice 2

On considère la suite (d_n) définie par :

$$d_n = \frac{2n^2 + 12n + 6}{n + 3}$$

1) Montrer que pour tout entier n,

$$d_n = 2n + 6 - \frac{12}{n + 3}$$

2) Déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} d_n$.