exercices sur les limites

Exercice 1

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = n + (-1)^n$.

Exercice 2

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$.

Exercice 3

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n} cos(n)$ pour $n > 0$.

Exercice 5

1. Déterminer la limite de $\sqrt{n+1}, n \geq 0$.
2. Conjecturer le comportement de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour $n \geq 1,\ u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
4. Montrer que $u_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
5. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 6

Pour tout entier naturel non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2 + i}$$

1. Expliciter u_n.
2. Combien de termes comporte la somme ?
3. Quelle est la limite de chacun de ces termes quand n tend vers $+\infty$?
4. Quel est le plus petit de ces termes ? Quel est le plus grand ?
5. En déduire que :

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

6. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et :

$$u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2}$$

1. Démontrer par récurrence que : $0 < u_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $u_{n+1} \leq \frac{3}{n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = \frac{1}{4}{u_n}^2$ avec $u_0 = 3$.

1. Déterminer u_1, u_2 et u_3 à 10^2 près.
2. Sur la figure ci-dessous, représenter u_0, u_1 et u_2 et conjecturer le comportement de la suite.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq 3$.
4. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Justifier que la suite (u_n) converge.