Limite finie d'une suite

Définition

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Analyse et compréhension

Comment démontrer qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$?

Pour démontrer qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, il faudrait démontrer que :

— tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Que signifie cette formulation ?

Qu'est-ce qu'un intervalle ouvert contenant ℓ ?

Qu'entend-on par tout intervalle ouvert contenant ℓ ?

Imaginons que la limite finie d'une suite soit 10. Un intervalle ouvert contenant 10 pourrait être par exemple l'un quelconque des intervalles suivants :

$$]-20\,;\,100[\,,\,]0\,;\,20[\text{ ou }]9\,;\,11[$$

Et pourquoi pas les intervalles suivants ?

$$]-\infty\,;\,+\infty[\text{ ou }]9{,}999\,;\,10{,}001[$$

Nous pourrions en tout état de cause commodément écrire tous les intervalles ouverts contenant 10 sous la forme :

$$]10-\alpha\,;\,10+\beta[\text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ seraient deux réels positifs non nuls}$$

ou encore plus simplement

$$]10-\alpha\,;\,10+\alpha[\text{ où } \alpha > 0.$$

D'une manière générale, tout intervalle ouvert contenant ℓ pourra s'écrire sous la forme

$$]\ell-\alpha\,;\,\ell+\alpha[\text{ où } \alpha > 0\text{, réel quelconque.}$$

Pour savoir si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$, il convient alors simplement de nous poser la question :

— tout intervalle ouvert contenant ℓ contient-il toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ?

Formulée différemment, la question devient :

— toutes les valeurs u_n sont-elles contenues dans tout intervalle ouvert contenant ℓ à partir d'un certain rang ?

Cette question se traduit dès lors mathématiquement par :

— A-t-on, quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$, $u_n \in]\ell - \alpha\,;\ \ell + \alpha[$ à partir d'un certain rang ?

Soit encore : $\exists ?\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall\alpha > 0\ \ u_n \in]\ell - \alpha\,;\ \ell + \alpha[\ \ \forall n > n_0$.

Autrement dit, existe-t-il un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont contenus dans tout intervalle ouvert ?

En définitive, quel que soit l'intervalle ouvert $]\ell - \alpha\,;\ \ell + \alpha[$ considéré, s'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont contenus dans cet intervalle, alors on pourra conclure que $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n) = \ell$.

La compréhension de ces éléments de langage constituera le point d'achoppement auquel se heurtera notre entendement dans l'approche du concept de limite finie d'une suite. Il conviendra par conséquent systématiquement de bien vouloir clarifier la nature du problème à résoudre pour déterminer si un nombre ℓ est la limite finie d'une suite considérée. Il s'agira à chaque fois d'un exercice troublant mais édifiant.

Elle est pas belle la vie ?