Limite finie d'une suite

Définition

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{4}{n}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Tableau de valeurs

n	1	10	100	1000	10 000	$\to +\infty$
u_n	4	0,4	0,04	0,004	0,0004	$\to 0^+$

D'après le tableau ci-dessus, nous pouvons conjecturer que la suite (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Démontrons que cette suite a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

Attendue la définition posée, il est nécessaire d'examiner la question suivante :

"Est-ce que tout intervalle ouvert contenant la valeur 0 contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ?"

Autrement dit, existe-t-il un rang à partir duquel toutes les valeurs de u_n sont contenues dans n'importe quel intervalle ouvert contenant 0.

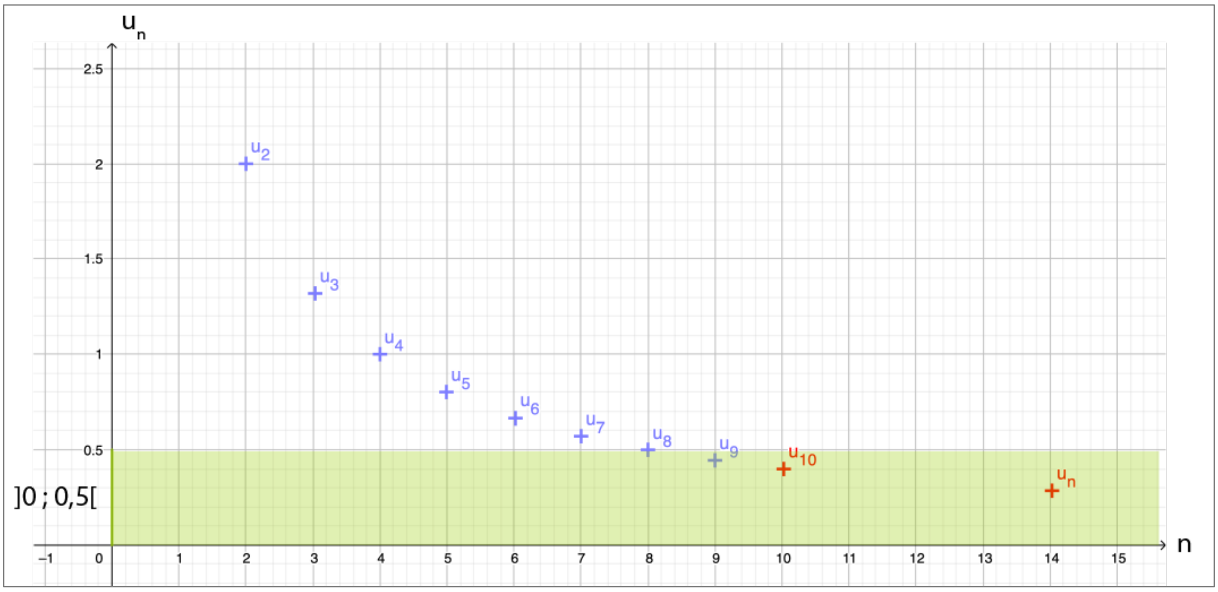
La suite (u_n) étant une suite dont les termes sont strictement supérieurs à 0 car $\frac{4}{n} > 0$ pour tout $n > 0$, les intervalles ouverts à considérer sont les intervalles de la forme $]0\,;\alpha\,[$ où $\alpha > 0$.

Examinons ce qui se passe lorsque $u_n \in]0;\alpha[$.

$$u_n \in]0;\alpha[\Leftrightarrow 0 < u_n < \alpha \Leftrightarrow 0 < \frac{4}{n} < \alpha \Leftrightarrow 0 < 4 < n\alpha \Leftrightarrow 0 < \frac{4}{\alpha} < n.$$

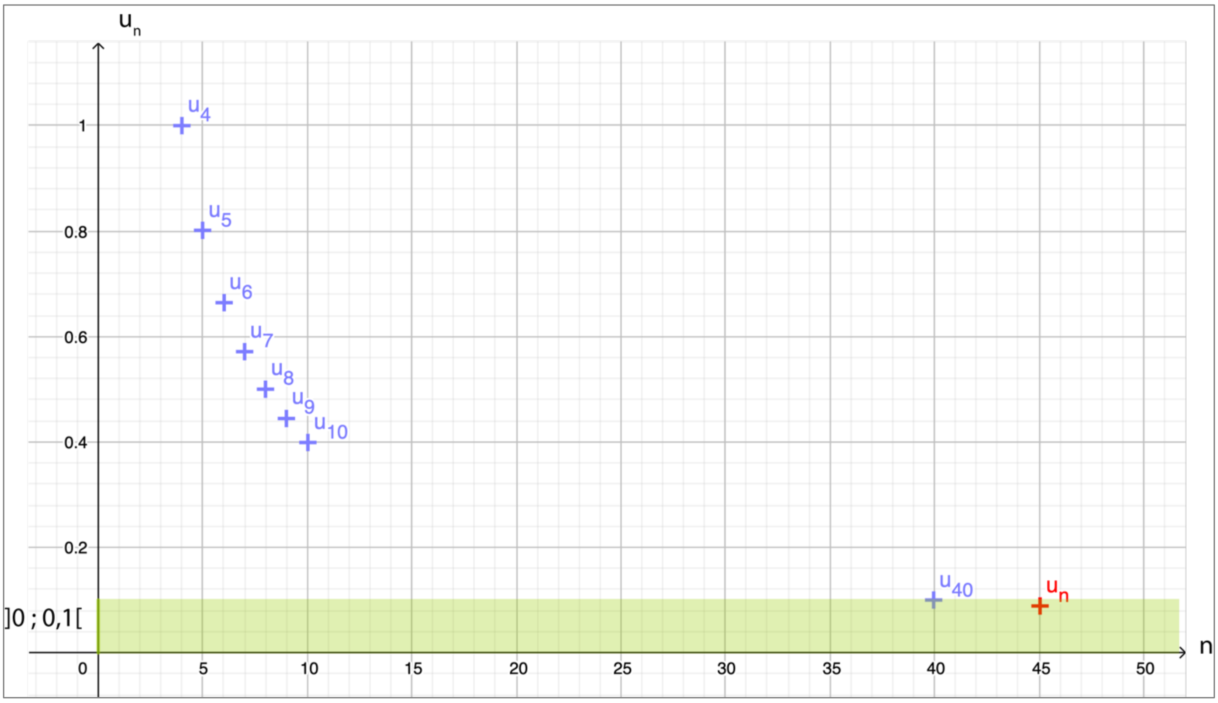
Pour $\alpha = 0{,}5$, on a : $n > \frac{4}{0{,}5} = 8$

Autrement dit, pour $n > 8$, on a : $u_n \in]0;0{,}5[$.



Pour α = 0,1, on a : $n > \frac{4}{0,1} = 40$

Autrement dit, pour n > 40, on a : $u_n \in]0; 0,1[$.



Pour α = 0,000 001, on a : $n > \frac{4}{10^{-6}} = 4\ 000\ 000$

Autrement dit, pour n > 4 000 000, on a : $u_n \in]0; 0,000\ 001[$.

D'une manière générale, quelle que soit la valeur du nombre réel α (aussi proche que l'on veut de zéro), on a : $n > \frac{4}{\alpha}$
Tout intervalle ouvert contenant 0 contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
Ici : $\frac{4}{\alpha}$.

<u>Conclusion</u>

Tout intervalle ouvert contenant 0 contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang donc, par définition, la suite (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.