Limite finie - exercices corrigés

Définition

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers +∞ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

La question à laquelle répondre

— A-t-on, quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$, $u_n \in]\ell - \alpha\,;\,\ell + \alpha[$ à partir d'un certain rang ?

Soit encore : $\exists ?\, n_0 \in \mathbb{N} / \forall \alpha > 0\;\; u_n \in]\ell - \alpha\,;\,\ell + \alpha[\;\; \forall n > n_0$.

Autrement dit, existe-t-il un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont contenus dans tout intervalle ouvert ?

En définitive, quel que soit l'intervalle ouvert $]\ell - \alpha\,;\,\ell + \alpha[$ considéré, s'il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont contenus dans cet intervalle, alors on pourra conclure que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \ell$.

Exemple 1

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$. On peut conjecturer que la suite tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Comment le démontrer ? A quelle question répondre ?

— A-t-on, quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$, $u_n \in]0 - \alpha\,;\,0 + \alpha[$ à partir d'un certain rang ? Autrement dit, pour tout intervalle ouvert $]-\alpha\,;\,+\alpha[$, $\alpha > 0$, existe-t-il un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont contenus dans ledit intervalle ?

$$u_n \in]-\alpha\,;\,+\alpha[\Leftrightarrow -\alpha < u_n < \alpha \Leftrightarrow -\alpha < \frac{1}{n} < \alpha \Leftrightarrow -n\alpha < 1 < n\alpha$$

$$\Leftrightarrow -n < \frac{1}{\alpha} < n$$

On note donc que, quelle que soit la valeur du réel α, si $n > \frac{1}{\alpha}$, alors $u_n \in]-\alpha\,;\,+\alpha[$

Il existe donc bien un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont contenus dans tout intervalle ouvert contenant 0.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = 0$.

exemple 2

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$. On peut conjecturer que la suite tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Comment le démontrer ? Quelle question doit-on se poser ?

— A-t-on, quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$, $u_n \in]1 - \alpha\,;\,1 + \alpha[$ à partir d'un certain rang ? Autrement dit, pour tout intervalle ouvert $]1 - \alpha\,;\,1 + \alpha[$, $\alpha > 0$, existe-t-il un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont contenus dans ledit intervalle ?

$$u_n \in]1 - \alpha\,;\,1 + \alpha[\Leftrightarrow 1 - \alpha < u_n < 1 + \alpha \Leftrightarrow 1 - \alpha < 1 + \frac{1}{n^2} < 1 + \alpha$$

$$\Leftrightarrow -\alpha < \frac{1}{n^2} < \alpha \Leftrightarrow -n^2\alpha < 1 < n^2\alpha \Leftrightarrow -n^2 < \frac{1}{\alpha} < n^2$$

Or : $0 < \frac{1}{\alpha}$

D'où : $u_n \in]1 - \alpha\,;\,1 + \alpha[\Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

Ainsi, quelle que soit la valeur du réel α, si $n > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, alors $u_n \in]1 - \alpha\,;\,1 + \alpha[$

Il existe donc bien un rang n_0 à partir duquel tous les termes u_n de la suite sont contenus dans tout intervalle ouvert contenant 1.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to \infty} (u_n) = 1$.

propriétés

Les suite (u_n) définies par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \cdots, \frac{1}{n^p}$ où p est un entier naturel non nul ont toutes pour limite le nombre 0. On dit qu'elles convergent vers 0. Nous verrons que Ces résultats nous faciliterons l'étude des limites pour de nombreuses suites.

exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{3n+1}{n}$ pour tout entier naturel n non nul.

1. Calculer u_n pour n = 1, 2, 10, 100 et 1 000.
2. Quelle limite peut-on conjecturer pour (u_n) ?
3. Démontrer à l'aide de la définition que : $lim(u_n) = 3$.