Limite infinie d'une suite

Définition

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle du type]A ; $+\infty$[(avec A un nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 3n^2 - 4$ pour tout entier naturel n.

Démontrons que cette suite a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Attendue la définition posée, il est nécessaire d'examiner la question suivante : "Est-ce que tout intervalle du type]A ; $+\infty$[(A étant un nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ?"

Autrement dit, existe-t-il un rang à partir duquel toutes les valeurs de u_n sont contenues dans n'importe quel intervalle du type]A ; $+\infty$[?

Examinons ce qui se passe lorsque $u_n \in]A; +\infty[$.

$$u_n \in]A; +\infty[\Leftrightarrow u_n > A \Leftrightarrow 3n^2 - 4 > A \Leftrightarrow 3n^2 > A + 4 \Leftrightarrow n^2 > \frac{A+4}{3}$$

$$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{A+4}{3}}$$

Pour A = 100, on a : $n > \sqrt{\frac{100+4}{3}} \approx 5{,}9$

Autrement dit, pour n ≥ 6, on a : $u_n \in]100; +\infty[$.

Pour A = 1000, on a : $n > \sqrt{\frac{1000+4}{3}} \approx 18{,}3$

Autrement dit, pour n ≥ 19, on a : $u_n \in]1000; +\infty[$.

Pour A = 1 000 000, on a : $n > \sqrt{\frac{10^6+4}{3}} \approx 577{,}4$

Autrement dit, pour n ≥ 578, on a : $u_n \in]10^6; +\infty[$.

Tout intervalle du type $]A;+\infty[$ (avec A nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, qu'il s'est avéré (dans le cas étudié) possible de déterminer.

Conclusion

Par définition, tout intervalle du type $]A;+\infty[$ (avec A nombre réel) contenant toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang, la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.