

PROBLÈME

On considère la suite arithmético-géométrique (u_n) définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = 0,9u_n + 20$ où $u_0 = 10$.

1. Sans la calculatrice, déterminer les valeurs des termes u_1 , u_2 et u_3 .
2. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
3. Démontrer par un raisonnement par récurrence que $u_n = 200 - 190 \times 0,9^n$ pour tout entier naturel n .
4. Déterminer $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
5. Quelle est la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini ? Conjecturer le résultat.

DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

On note : $\lim(u_n) = \ell$. Il est inutile de préciser que l'on fait tendre n vers $+\infty$ car on ne peut faire tendre n que vers $+\infty$.

6. Tout intervalle ouvert contenant 200 contient-il toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ? En considérant l'intervalle ouvert quelconque $]200 - \varepsilon; 200 + \varepsilon[$ contenant 200 (où ε est un réel quelconque), démontrer que tel est le cas.

ANNEXE

Courbe représentative de la fonction : $x \mapsto 0,9^x$

