La suite de Héron d'Alexandrie

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$, $u_0 > 0$.

1. Montrer que $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction que l'on précisera.
2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

n	u_n
0	2
1	
2	
3	
4	

3. Comparer $\sqrt{2}$ à la valeur vers laquelle tend la suite (u_n).
4. On considère l'algorithme ci-dessous. Compléter le tableau détaillant son fonctionnement et indiquer ce que fait cet algorithme.

```
U ← 2
Pour n allant de 1 à 3, faire
    U ← 1/2 (U + 2/U)
Afficher U
```

$U \leftarrow \frac{1}{2}\left(U + \frac{2}{U}\right)$

n	U

5. Résoudre l'équation f(x) = x.
6. On admet que (u_n) tend vers la limite ℓ. Expliquer pourquoi cette limite est solution de l'équation f(x) = x.
7. Déterminer f '(x) et étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle]0 ; +∞[.
8. Représenter schématiquement la courbe représentative de la fonction f sur]0 ; 3[.
9. On considère le graphique joint en ANNEXE. Placer sur ce graphique les valeurs de u_0, u_1, u_2 et u_3.

ANNEXE