Méthode de Héron d'Alexandrie

Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec qui vécut vraisemblablement au premier siècle de notre ère. Il fut le premier à exposer l'utilisation d'approximations successives pour calculer la racine carrée d'un nombre A. A partir d'une valeur approchée 'a' de la racine carrée du nombre A (A > 0), il donne une seconde approximation $\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)$ et propose d'itérer le processus.

Considérant la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = a$, où a est un réel strictement positif voisin de $\sqrt{A}$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right)$, il est possible de démontrer que cette suite est une suite convergente dont la limite est le nombre $\sqrt{A}$.

1) Recopier et compléter à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur le tableau ci-dessous :

On prendra A = 5 et $u_0 = 1$, par exemple.

u_0	
u_1	
u_2	
u_3	
u_4	
u_5	
u_6	
u_7	
u_8	
u_9	
u_{10}	

2) Vérifier à la calculatrice que $\sqrt{5} \approx 2{,}236$.

3) Faire une conjecture quant à la limite de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.

4) Étude de la suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$ avec $u_0 = 1$..

La suite (u_n) est définie par une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right)$.

a) Construire sur la représentation graphique de la fonction f ci-jointe les cinq premiers termes de la suite (u_n).

b) Faire une conjecture quant à la limite de la suite (u_n) d'après la représentation graphique.

Représentation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$