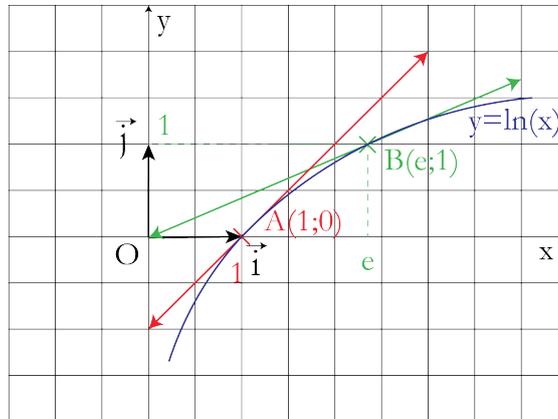


La fonction logarithme népérien

1. Tracer schématiquement la courbe représentative de la fonction \ln , ses points remarquables et ses tangentes remarquables.

4 points



2. On a :

3 points

- a) $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$ b) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
 c) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ d) $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
 e) $\ln(a^3) = 3\ln(a)$ f) $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

3. Indiquer les limites ci-dessous :

2 points

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = 0^+$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \ln(x)) = 0^-$

4. Exprimons en fonction de $\ln(2)$ et $\ln(3)$ en détaillant les calculs.

2 points

- a) $\ln(27) = \ln(3^3) = 3\ln(3)$
 b) $\ln(32) = \ln(2^5) = 5\ln(2)$
 c) $\ln(3e^3) = \ln(3) + \ln(e^3) = \ln(3) + 3\ln(e) = \ln(3) + 3$
 d) $\ln\left(\frac{2}{e}\right) = \ln(2) - \ln(e) = \ln(2) - 1$

5. On considère la fonction f définie par $f(x) = x \ln(x) - x$. Déterminons $f'(x)$.

$$f(x) = u(x)v(x) - x \text{ avec } u(x) = x \text{ et } v(x) = \ln(x)$$

3 points

$$u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{D'où : } f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

6. Résolvons l'équation $\ln(x) \geq 0$.

1 point

L'ensemble des solutions de l'équation $\ln(x) \geq 0$ est l'intervalle $[1, +\infty[$ (c.f. cours)

7. Déterminons l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) représentative de la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = \ln(x)$ au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$.

Une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$ s'écrit :

1 point

$$y = f' \left(\frac{1}{e} \right) \left(x - \frac{1}{e} \right) + f \left(\frac{1}{e} \right).$$

Déterminons $f \left(\frac{1}{e} \right)$, $f'(x)$ et $f' \left(\frac{1}{e} \right)$.

0,5 point

$$f \left(\frac{1}{e} \right) = \ln \left(\frac{1}{e} \right) = -\ln(e) = -1$$

1 point

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } f' \left(\frac{1}{e} \right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{e} \right)} = e$$

1 point

D'où, la tangente (T) a pour équation $y = e \left(x - \frac{1}{e} \right) - 1 = ex - 1 - 1$.

0,5 point

C'est-à-dire : $y = ex - 2$ (équation réduite de la tangente)

8. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction g définie sur l'ensemble des réels positifs par

$$g(x) = (x + 1) \frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\text{On a : } g(x) = (x + 1) \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} \ln(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \ln(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2}$$

1 point

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ pour tout entier naturel } n \text{ supérieur à } 0 \text{ (c.f. cours croissance comparée)}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$