Problème

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\,;\,\mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :

   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$

   a. Montrer que, pour tout nombre réel t,

   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}.$$

   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.

   b. Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\,\mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
   Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

   a. Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
   On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
   On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
   Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D$'$ de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.

   b. Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
   Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**