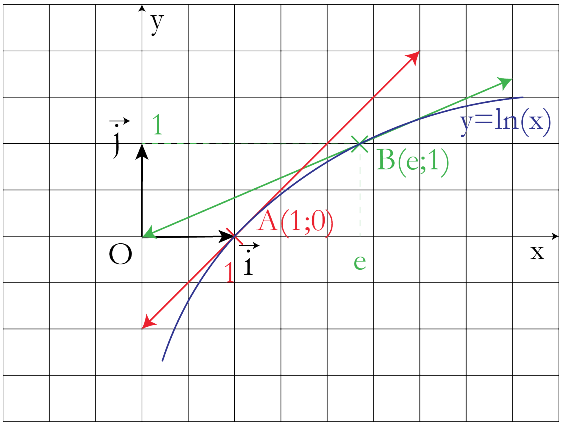
La fonction Logarithme népérien

1. Tracer schématiquement la courbe représentative de la fonction ln, ses points remarquables et ses tangentes remarquables.



2. On a :

a) $ln(a) + ln(b) = \ln(ab)$

b) $ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

c) $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

d) $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

e) $ln(a^3) = 3\ln(a)$

f) $ln(a) - ln(b) = ln\left(\frac{a}{b}\right)$

3. Indiquer les limites ci-dessous :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{ln(x)}{x}\right) = 0^+$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(xln(x)\right) = 0^-$

4. Exprimons en fonction de ln(2) et ln(3) en détaillant les calculs.

a) $ln(27) = \ln(3^3) = 3\ln(3)$

b) $ln(32) = \ln(2^5) = 5\ln(2)$

c) $ln(3e^3) = ln(3) + ln(e^3) = ln(3) + 3\ln(e) = \ln(3) + 3$

d) $ln\left(\frac{2}{e}\right) = \ln(2) - \ln(e) = \ln(2) - 1$

5. On considère la fonction f définie par $f(x) = xln(x) - x$. Déterminons f '(x).

$f(x) = u(x)v(x) - x$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$

D'où : $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$

6. Résolvons l'équation $ln(x) \geq 0$.

   L'ensemble des solutions de l'équation $ln(x) \geq 0$ est l'intervalle [1, +∞[(c.f. cours)

7. Déterminons l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe (C_f) représentative de la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = ln(x)$ au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$.

   Une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point A d'abscisse $\frac{1}{e}$ s'écrit :

   $y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right)$.

   Déterminons $f\left(\frac{1}{e}\right)$, $f'(x)$ et $f'\left(\frac{1}{e}\right)$.

   $f\left(\frac{1}{e}\right) = ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$

   $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{e}\right)} = e$

   D'où, la tangente (T) a pour équation $y = e\left(x - \frac{1}{e}\right) - 1 = ex - 1 - 1$.

   C'est-à-dire : $y = ex - 2$ (équation réduite de la tangente)

8. Déterminer la limite en +∞ de la fonction g définie sur l'ensemble des réels positifs par

$$g(x) = (x + 1)\frac{ln(x)}{x^2}$$

   On a : $g(x) = (x + 1)\frac{ln(x)}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} \times \frac{ln(x)}{x} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{ln(x)}{x}$

   Or :

   $\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

   Donc : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$