

# objectif BAC - Problème 3

## Partie I

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

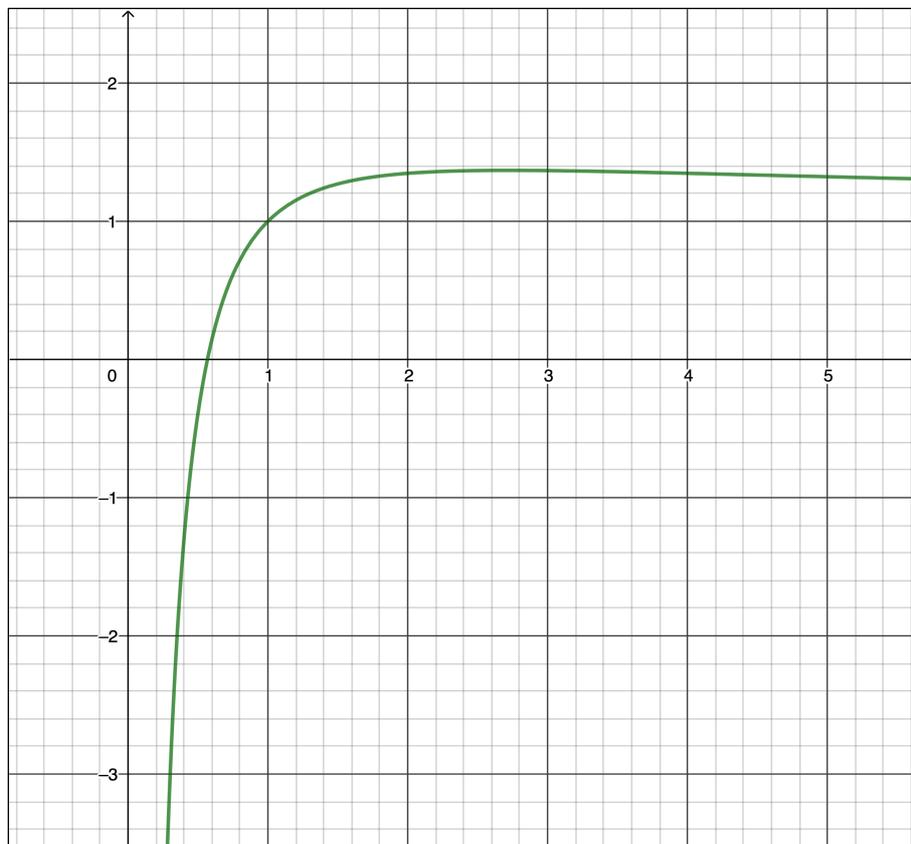
$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$ .
3. On note  $h'$  la fonction dérivée de  $h$ . Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ , on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
5. Démontrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ . Justifier que l'on a :  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

Représentation graphique de la fonction  $h$



## Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0; +\infty[$  par :

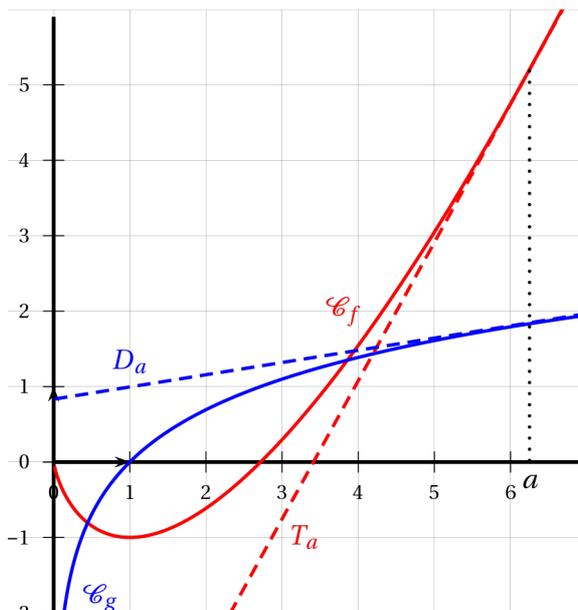
$$f(x) = x \ln(x) - x; \quad g(x) = \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentant respectivement les fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout nombre réel  $a$  strictement positif, on appelle :

- $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en son point d'abscisse  $a$ ;
- $D_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_g$  en son point d'abscisse  $a$ .

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ainsi que deux tangentes  $T_a$  et  $D_a$  sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de  $a$  pour lesquelles les droites  $T_a$  et  $D_a$  sont perpendiculaires.

Soit  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

1. Justifier que la droite  $D_a$  a pour coefficient directeur  $\frac{1}{a}$ .
2. Justifier que la droite  $T_a$  a pour coefficient directeur  $\ln(a)$ .

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs  $m$  et  $m'$  sont perpendiculaires si et seulement si  $mm' = -1$ .

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de  $a$ , que l'on identifiera, pour laquelle les droites  $T_a$  et  $D_a$  sont perpendiculaires.