

objectif BAC - Problème 3

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

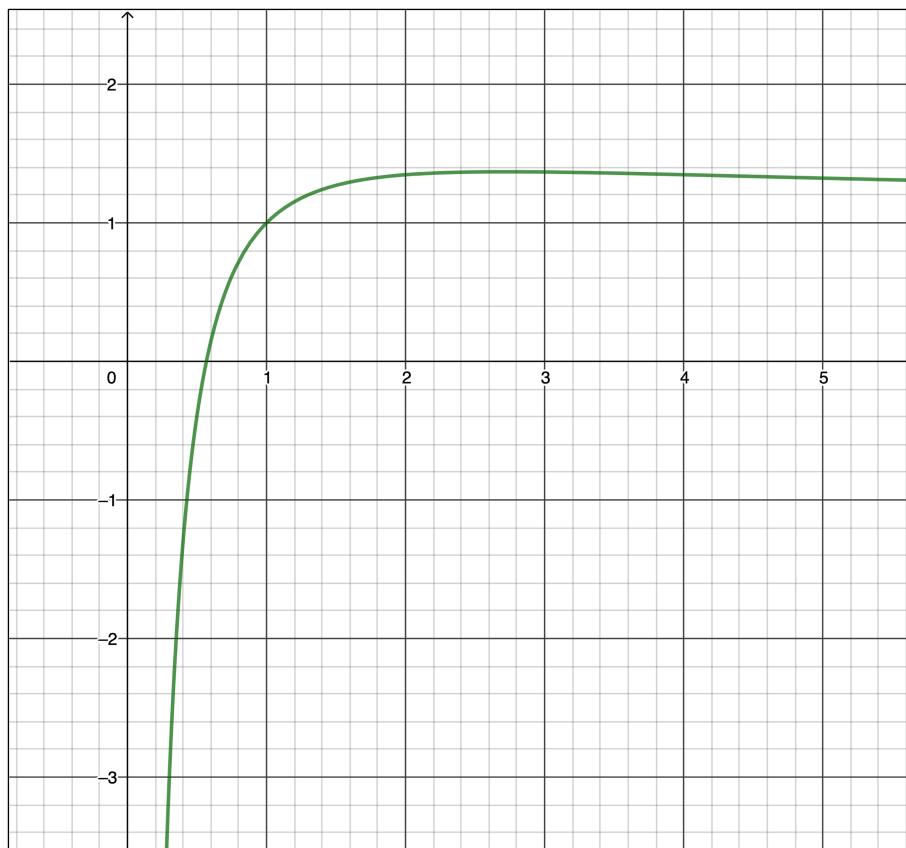
$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h . Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0; +\infty[$. Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Représentation graphique de la fonction h



Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par :

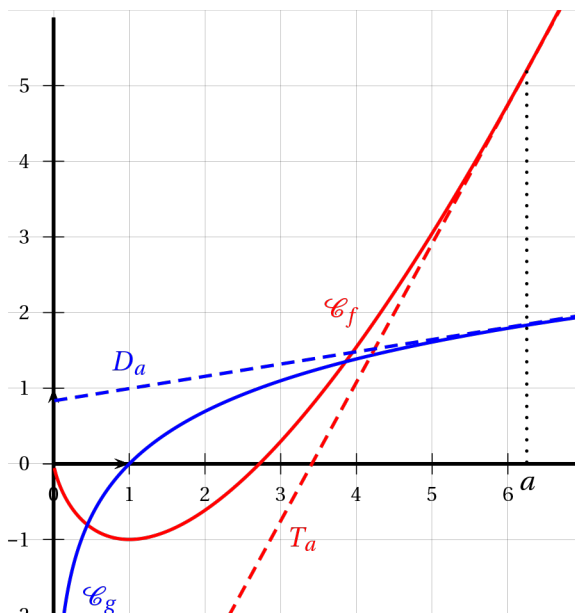
$$f(x) = x \ln(x) - x; \quad g(x) = \ln(x).$$

On note \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

- T_a la tangente à \mathcal{C}_f en son point d'abscisse a ;
- D_a la tangente à \mathcal{C}_g en son point d'abscisse a .

Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\frac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a , que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.