intégration

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x$ sur l'ensemble des réels.

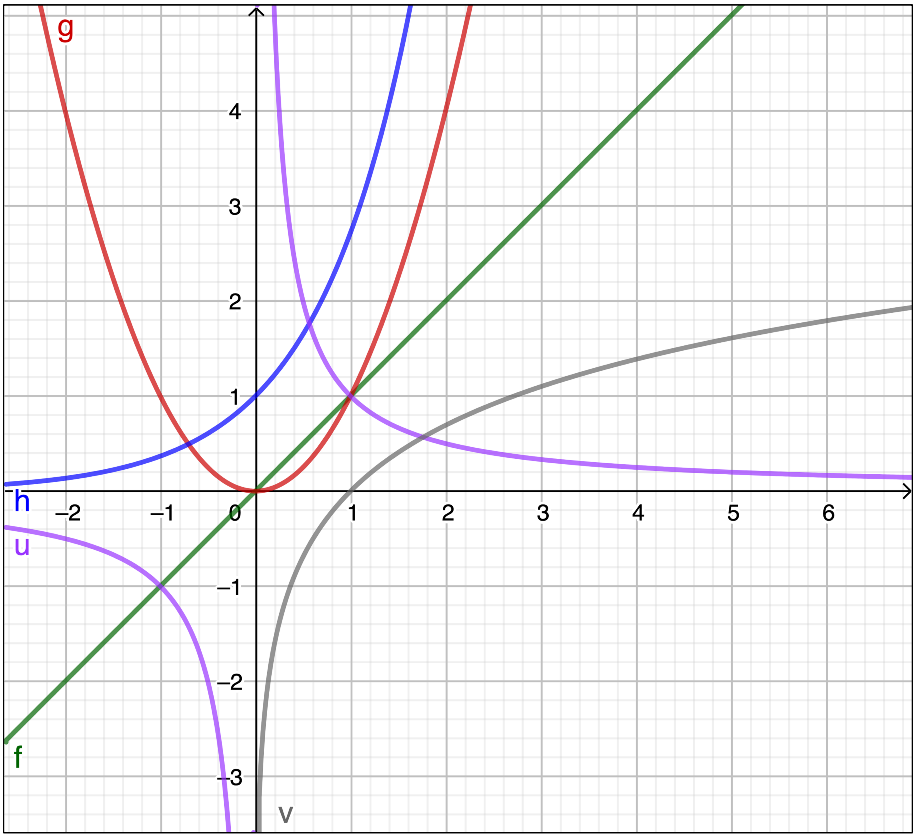
g définie par : $g(x) = x^2$ sur l'ensemble des réels.

h définie par : $h(x) = e^x$ sur l'ensemble des réels.

u définie par : $u(x) = \frac{1}{x}$ sur le domaine]- ∞ ; 0[∪]0 ; +∞ [.

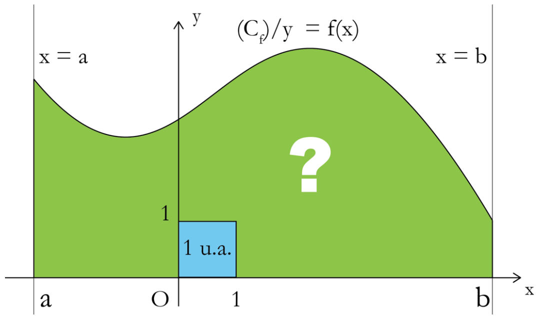
v définie par : $v(x) = ln(x)$ sur l'intervalle]0 ; +∞ [.

Ces cinq fonctions sont représentées graphiquement par les courbes ci-dessous.



position du problème

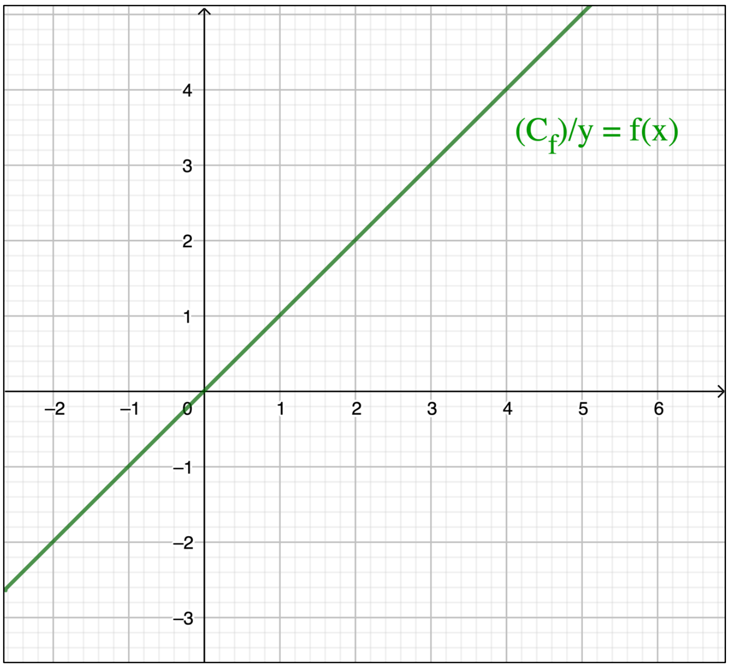
Étant donnée la courbe représentative d'une fonction et considérant un intervalle [a ; b] sur lequel cette fonction est positive, est-il possible de déterminer l'aire de la région délimitée par la courbe, l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations respectives x = a et x = b ?



Exercice 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = x$ sur l'ensemble des réels.

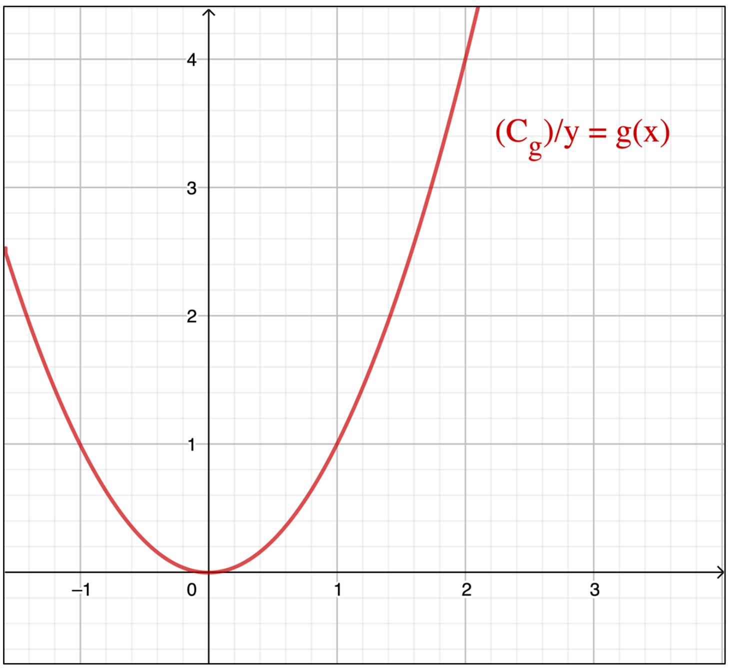
1. Déterminer l'aire A de la région délimitée par la droite (C_f), l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations x = a et x = b.



2. Soit F la fonction dérivable telle que F '(x) = f(x) et F(0) = 0. Déterminer F(x).
   On dit que la fonction F est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction f.
3. Calculer F(b) - F(a) et comparer l'aire A et F(b) - F(a).

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $g(x) = x^2$ sur l'ensemble des réels.

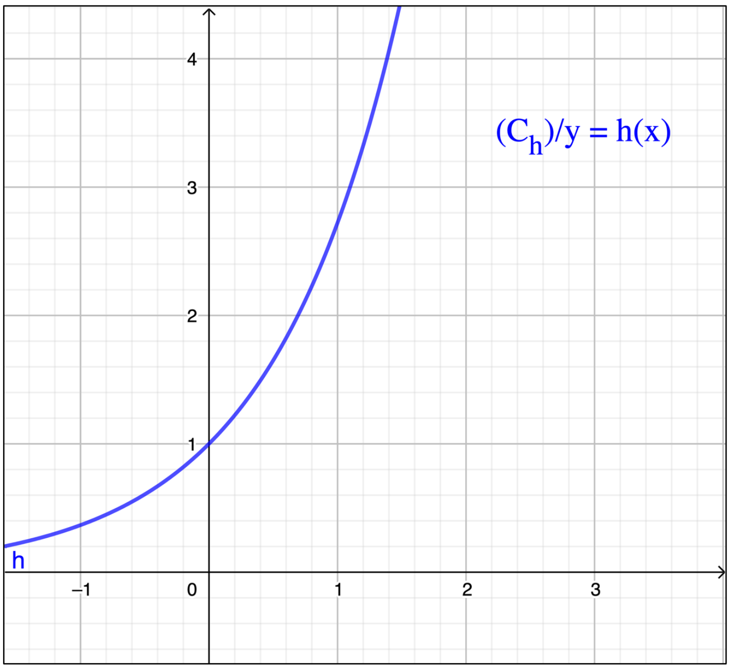


1. Démontrer que l'aire A de la région délimitée par la parabole (C_g), l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations x = 0 et x = 1 est comprise entre 0,25 et 0,5.
2. Soit G la fonction dérivable telle que G '(x) = g(x) et G(0) = 0. Déterminer G(x).
3. Calculer G(1) - G(0). A-t-on G(1) - G(0) ∈ [0,25 ; 0,5] ?
4. Représenter la fonction g à l'aide de la calculatrice sur l'intervalle [-1 ; 2], puis, après avoir tapé sur les touches "Calculs" et "7" et entré 0 pour "Borne inférieure ?" et 1 pour "Borne supérieure ?", observer le résultat affiché.
5. Déterminer l'aire de la région délimitée par la parabole (C_g), l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations x = 1 et x = 2.
6. Calculer G(2) - G(1). Conclusion ?

Exercice 3

On considère la fonction h définie par $h(x) = e^x$ sur l'ensemble des réels.

1. Soit H la fonction dérivable telle que H '(x) = h(x) et H(0) = 0. Déterminer H(x). On dit que la fonction H est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction h.
2. L'aire A de la région délimitée par la courbe (C_h), l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations x = 0 et x = 1 est égale à H(1) - H(0). Calculer A.

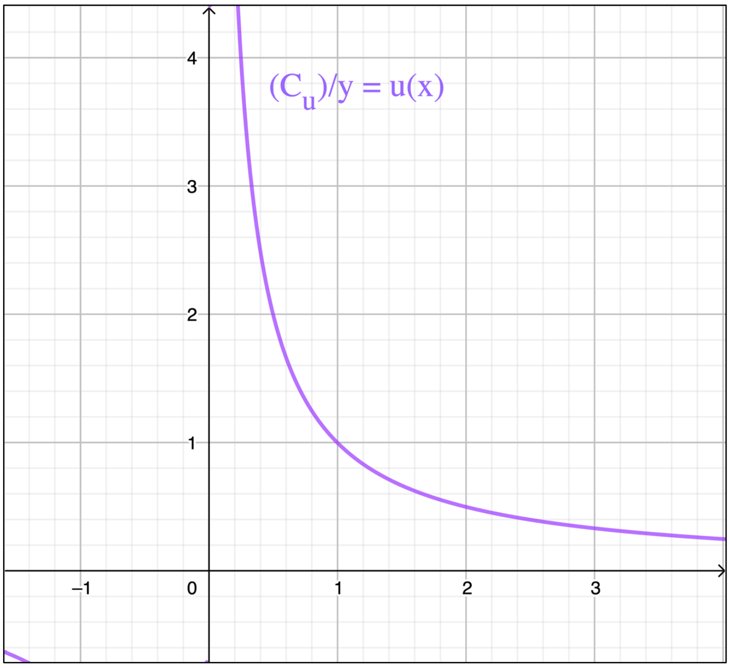


3. L'aire A' de la région délimitée par la courbe (C_h), l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations x = -1 et x = 0 est égale à H(0) - H(-1). Calculer A'.

Vérifier les résultats à l'aide de la calculatrice.

Exercice 4

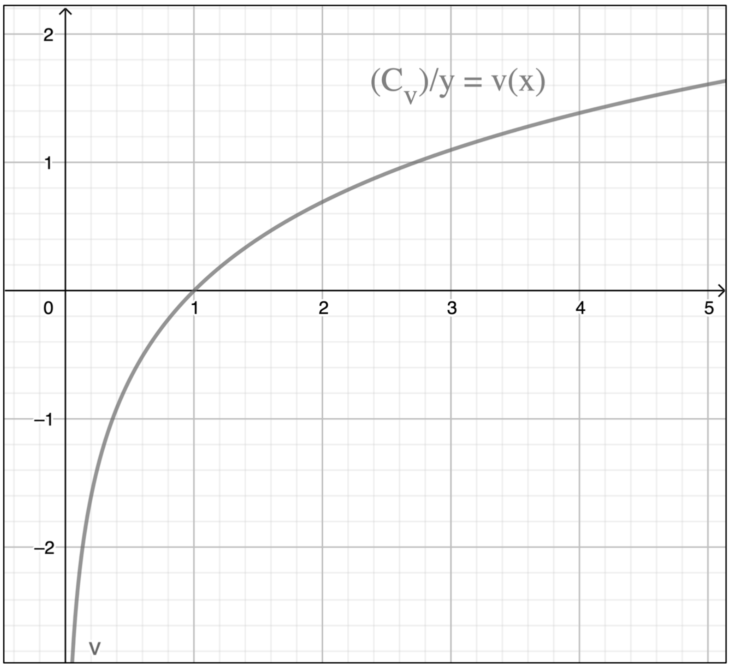
On considère la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{x}$ sur le domaine]- ∞ ; 0[∪]0 ; +∞ [.



Déterminer l'aire de la région délimitée par la courbe (C_u), l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations x = 1 et x = 2. Vérifier le résultat à la calculatrice.

Exercice 5

On considère la fonction v définie par $v(x) = ln(x)$ sur l'intervalle]0 ; +∞ [.



Déterminer l'aire de la région délimitée par la courbe (C_v), l'axe des abscisses (Ox) et les deux droites verticales d'équations x = 1 et x = 2. Vérifier le résultat à la calculatrice.