Intégration par parties

Déterminer une primitive de fonction peut ne pas être toujours aisé. Parmi les méthodes utiles pour déterminer une primitive de fonction, il est utile de connaître la méthode d'intégration dite par parties.

Comment procéder ?
Nous savons que : $(fg)' = f'g + fg'$.
Par conséquent : $f'g = (fg)' - fg'$.
Une primitive d'un produit de fonctions de la forme $f'g$ est donc la différence d'une primitive de $(fg)'$, laquelle est aisée à déterminer puisqu'il s'agit de fg et d'une primitive de fg' (parfois aisée à déterminer).

Exemple

Déterminons une primitive de la fonction u définie par $u(x) = ln(x)$.

On a : $u(x) = 1 \times ln(x)$.

Donc : $u(x) = f'(x) \times g(x)$ avec $f'(x) = 1$ et $g(x) = ln(x)$.

Or : $f'(x) \times g(x) = (fg)'(x) - f(x) \times g'(x)$

D'où : $u(x) = (fg)'(x) - x \times \frac{1}{x} = (fg)'(x) - 1$.

Une primitive de $ln(x)$ est donc une primitive de $(fg)'(x) - 1$, c'est-à-dire $(fg)(x) - x$ avec $(fg)(x) = f(x) \times g(x) = xln(x)$.

Donc : Une primitive de $ln(x)$ est $xln(x) - x$.

Problème

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des réels par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Déterminer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.

3.a. Étudier la convexité de f.

3.b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe (C_f).

4. Pour tout nombre réel t ≥ 0, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)dx$$

4.a. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I(t) = (-t - 3)e^{-t} + e^2$.

4.b. Déterminer la limite de $I(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter géométriquement le résultat.

FIGURE