INTÉGRALE
FONCTION DE SIGNE QUELCONQUE

Définition

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I, on définit pour tous nombres réels a et b de l'intervalle I, l'intégrale de a à b de la fonction f par :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de la fonction f.

Remarque

La fonction : $x \longmapsto \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Propriété 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b étant deux réels appartenant à l'intervalle I.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Propriété 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a, b et c étant des réels de l'intervalle I.

La relation suivante est appelée relation de Chasles :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Propriété 3

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b étant des réels de l'intervalle I.

L'intégrale possède des propriétés dites de linéarité :

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Pour tout réel λ, $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$

Pour tous réels λ et μ, $\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$

Enfin :

$$\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Propriété 4

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b étant des réels de l'intervalle I tels que a ≤ b.

• Si f est positive sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

• Si f est négative sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

• Si f ≤ g sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$