

Problème d'intégration

On considère les fonctions f et g définies respectivement sur l'intervalle $]0; 1]$ par :

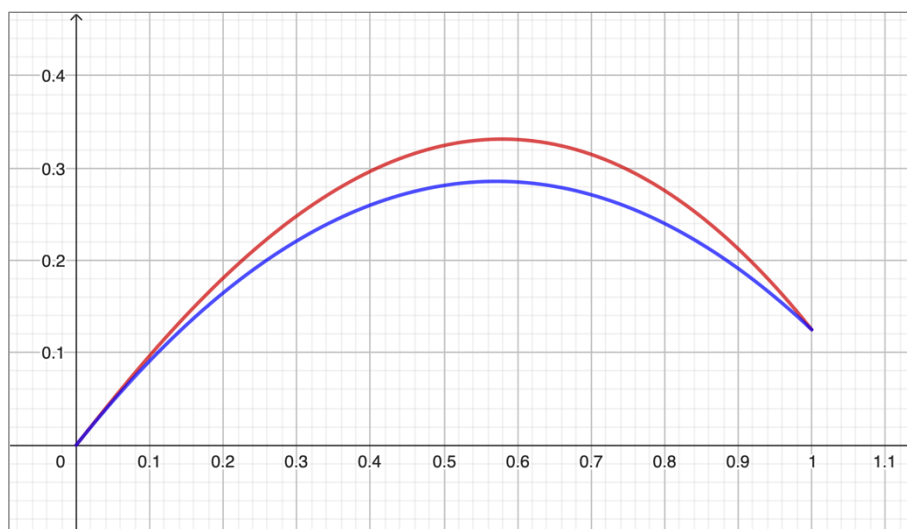
$$f(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln(x)$$

et

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x$$

On considère par ailleurs le nombre réel $a \in]0; 1]$ tel que $\ln(a) = 2(2 - a)$.

Ces fonctions f et g sont représentées sur la figure ci-dessous :



Position du problème

On souhaite calculer l'aire A de la région délimitée par les courbes (C_f) , (C_g) et les droites d'équations $x = \frac{1}{a}$ et $x = 1$.

1. Conjecturer une valeur approchée au dixième pour a .
2. Indiquer ce que représente l'intégrale ci-dessous :

$$\int_{\frac{1}{a}}^1 \frac{1}{4} x^2 \ln(x) dx$$

3. Déterminer une primitive de la fonction : $x \mapsto x^2 \ln(x)$ sur $]0; 1]$.
4. Démontrer que :

$$\int_{\frac{1}{a}}^1 x^2 \ln(x) dx = \frac{-a^3 - 6a + 13}{9a^3}$$

5. En déduire l'aire A .