équation différentielle

Dans une boulangerie, les baguettes sortent du four à une température de 225 °C.
On s'intéresse à l'évolution de la température d'une baguette après sa sortie du four.
On admet qu'on peut modéliser cette évolution à l'aide d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Dans cette modélisation, $f(t)$ représente la température en degré Celsius de la baguette au bout de la durée t, exprimée en heure, après la sortie du four.

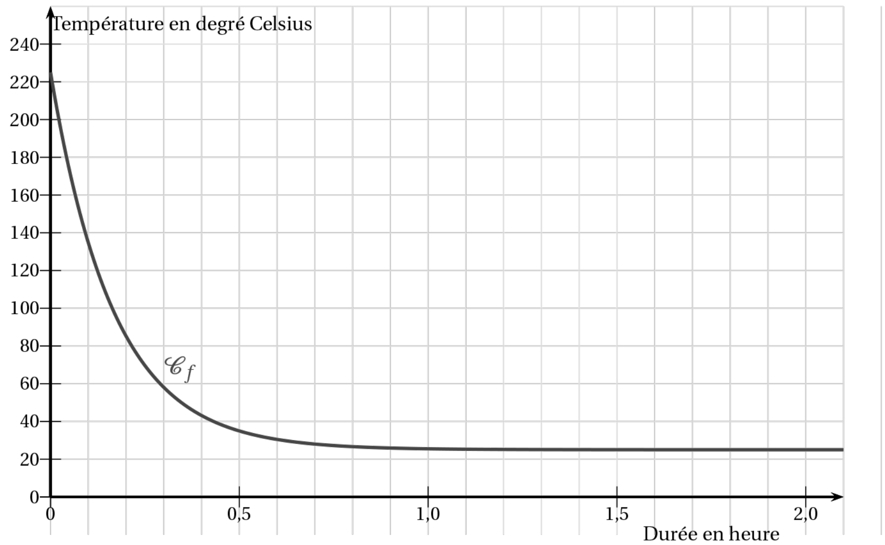
Ainsi, $f(0,5)$ représente la température d'une baguette une demi-heure après la sortie du four.
Dans tout l'exercice, la température ambiante de la boulangerie est maintenue à 25 °C.
On admet alors que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.

1. **a.** Préciser la valeur de $f(0)$.
   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + 6y = 150$.
   c. En déduire que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $f(t) = 200\mathrm{e}^{-6t} + 25$.
2. Par expérience, on observe que la température d'une baguette sortant du four :
   — décroît;
   — tend à se stabiliser à la température ambiante.

   La fonction f fournit-elle un modèle en accord avec ces observations?
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution dans $[0\ ;\ +\infty[$.

Pour mettre les baguettes en rayon, le boulanger attend que leur température soit inférieure ou égale à 40 °C. On note $\mathcal{T}_0$ le temps d'attente minimal entre la sortie du four d'une baguette et sa mise en rayon.

On donne en page suivante la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.



4. Avec la précision permise par le graphique, lire $\mathcal{T}_0$. On donnera une valeur approchée de $\mathcal{T}_0$ sous forme d'un nombre entier de minutes.

5. On s'intéresse ici à la diminution, minute après minute, de la température d'une baguette à sa sortie du four.

Ainsi, pour un entier naturel n, $\mathcal{D}_n$ désigne la diminution de température en degré Celsius d'une baguette entre la n-ième et la $(n+1)$-ième minute après sa sortie du four.

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = f\left(\frac{n}{60}\right) - f\left(\frac{n+1}{60}\right).$$

a. Vérifier que 19 est une valeur approchée de $\mathcal{D}_0$ à 0,1 près, et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

b. Vérifier que l'on a, pour tout entier naturel n :

$$\mathcal{D}_n = 200\mathrm{e}^{-0,1n}\left(1 - \mathrm{e}^{-0,1}\right).$$

En déduire le sens de variation de la suite $(\mathcal{D}_n)$, puis la limite de la suite $(\mathcal{D}_n)$.

Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?