équation différentielle

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

   Montrer que, pour tout réel x :

   $$g'(x) = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$

2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle

   $$(E): \qquad 3y' + y = 0.$$

   Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $\mathrm{M}(0\,;2)$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$

   et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

   a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{M}(0\,;2)$ admet une équation de la forme :

   $$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

   b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.

   Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a+3$.

2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2.