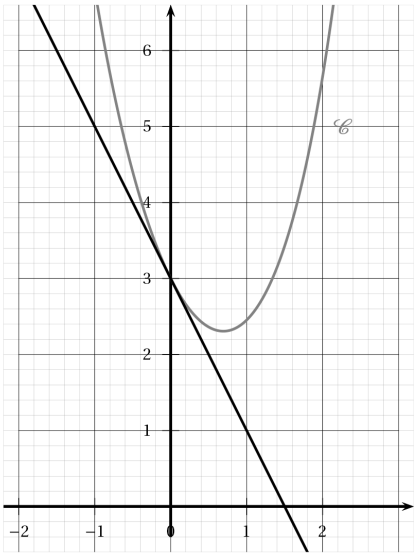
équation différentielle

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie. Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.

   b. Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.

   c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \quad y' + y = 2\mathrm{e}^{x} - x - 1$$

   a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} - x + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

   est solution de l'équation (E).

   b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

   c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 2 = \left(\mathrm{e}^{x} - 2\right)\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3. On admettra que, pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $\mathrm{e}^{x} - 2 > 0$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1\ ;\ +\infty[$.